# Lineare Algebra, Übung 6

1) Es seien $n > k$ zwei natürliche Zahlen. Man beweise die Gleichung:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}.$$

(Hinweis: Betrachten Sie die Menge der Teilmengen von $[1, n]$ aus $k+1$ Elementen, die das Element $n$ enthalten (bzw. nicht enthalten). Die Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dieser Formel nennt man Pascalsches Dreieck.)

2) Wir betrachten das Wort

$$a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ c\ c$$

Wieviele verschiedene Wörter kann man dadurch bilden, dass man die Buchstaben in diesem Wort vertauscht? (Das nennt man auch Permutationen mit Wiederholungen.)

3) Man hat 10 Eissorten. Wieviele verschiedene Eisbecher mit 3 Kugeln Eis sind möglich?

4) Es sei $\ell \in \mathbb{N}$. Ein Polynom $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ heißt homogen vom Grad $\ell$, wenn

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{t_1 + \ldots + t_n = \ell} a_{t_1,\ldots,t_n} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{t_n}, \tag{1}$$

wobei die Summe über alle $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ läuft, so dass $t_1, + \ldots + t_n = \ell$ und wobei $a_{t_1,\ldots,t_n} \in K$.

Dann gilt für alle $\lambda \in K$

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\ell F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Man beweise: Es sei $F$ ein Polynom, so dass für alle $\lambda \in K$ die Gleichung (2) gilt. Dann ist $F$ homogen vom Grad $\ell$.

(Hinweis: Jedes Polynom $F$ kann man als eine Summe schreiben

$$F = F_d + F_{d-1} + \ldots F_1 + F_0,$$

wobei $F_i$ ein homogenes Polynom vom Grad $i$ ist.)

**Abgabe bis Donnerstag, 26.5.2016, 14:00**