

## Der Regenbogen: Mathematische Überlegungen

Text: Andreas Müller

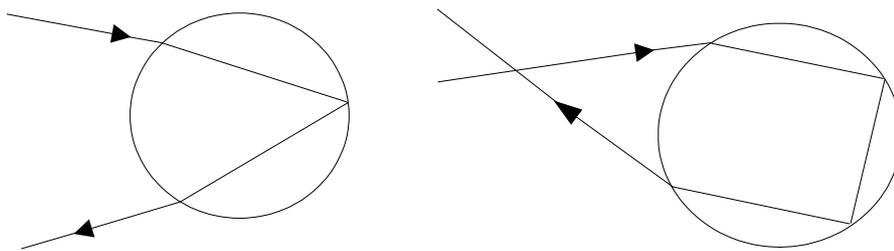
### 1. Voraussetzungen

Zur Vereinfachung des Modells werden einige Annahmen gemacht, die zwar nicht alle korrekt sind, das Ergebnis aber nur wenig verfälschen.

- die Tropfen sind kugelförmig
- alle Sonnenstrahlen sind parallel
- das Regengebiet wird aufgeteilt auf verschiedene Ebenen (=Wasserwand), von welchen vorerst nur eine betrachtet wird
- der Beobachter und die Sonne befinden sich auf einer Geraden, die senkrecht zur Wasserwand ist

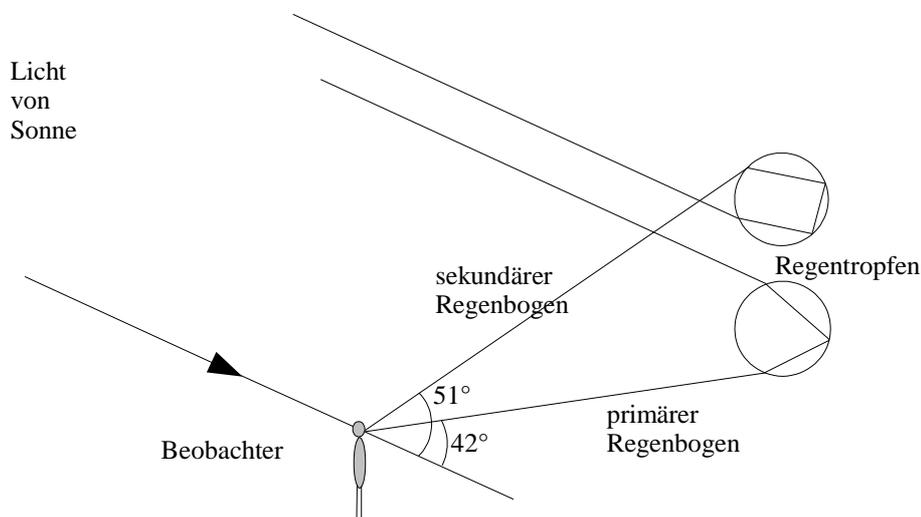
### 2. Entstehung des Regenbogens

Der Regenbogen entsteht, wenn gleichzeitig Regen fällt und die Sonne scheint. Man unterscheidet zwischen dem Hauptregenbogen bei einem Winkel (zwischen Beobachter-Sonnengegenpunkt und Beobachter-Regenbogen) von  $42^\circ$  und dem Nebenregenbogen bei einem Winkel von  $51^\circ$ .



Haupt- und Nebenregenbogen: Licht wird im Tropfen einmal resp. zweimal reflektiert.

Der Regenbogen entsteht dadurch, dass Lichtstrahlen auf einen Regentropfen fallen und durch Brechung, Beugung und Reflexion in einzelne Farben aufgespalten werden und zurückgeworfen werden.



Das Licht wird auch beim ersten Eintritt reflektiert (aber nicht gebogen) und es tritt auch am Punkt der ersten Reflexion aus dem Regentropfen aus. Das Licht wird dort zwar gebogen, da es aber aus der gleichen Richtung wie das direkte Sonnenlicht auf den Beobachter scheint, ist der Regenbogen zu schwach, um wahrgenommen zu werden. Auch bei drei- oder mehrfacher Reflexion im inneren des Regentropfens ist das Licht zu schwach oder an einer schlechten Position, so dass hier nur der Hauptregenbogen nach einmaliger Reflexion und der Nebenregenbogen nach zweimaliger Reflexion als sichtbare Phänomene interessant sind. Im folgenden wird primär der Hauptregenbogen betrachtet und der Nebenregenbogen wird nur erwähnt, wo es entscheidende Unterschiede gibt.

### 3. Lage des Regenbogens

#### 3.1 Einige Berechnungen

##### a) Hauptregenbogen

Bei der Berechnung des Ablenkungswinkel  $\gamma$  kann man von der Symmetrie profitieren, die sich daraus ergibt, dass bei der Reflexion der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist.

- $\alpha$ : Einfallswinkel

- $\beta$ : Berechnung nach Snellius

- $\alpha$ : wiederholt sich als Stufenwinkel, woraus man  $\alpha$ - $\beta$  berechnen kann

- $\gamma/2 = 180 - (180^\circ - \beta) - (\alpha - \beta)$ , weil der Winkel im Dreieck  $180^\circ$  beträgt

So ergibt sich die Formel  $\gamma = 2 * (2\beta - \alpha)$ . Da  $\beta = \sin^{-1}(\sin \alpha / n)$  ergibt sich

$\gamma = 2 * (2 * \sin^{-1}(\sin \alpha / n) - \alpha)$ .

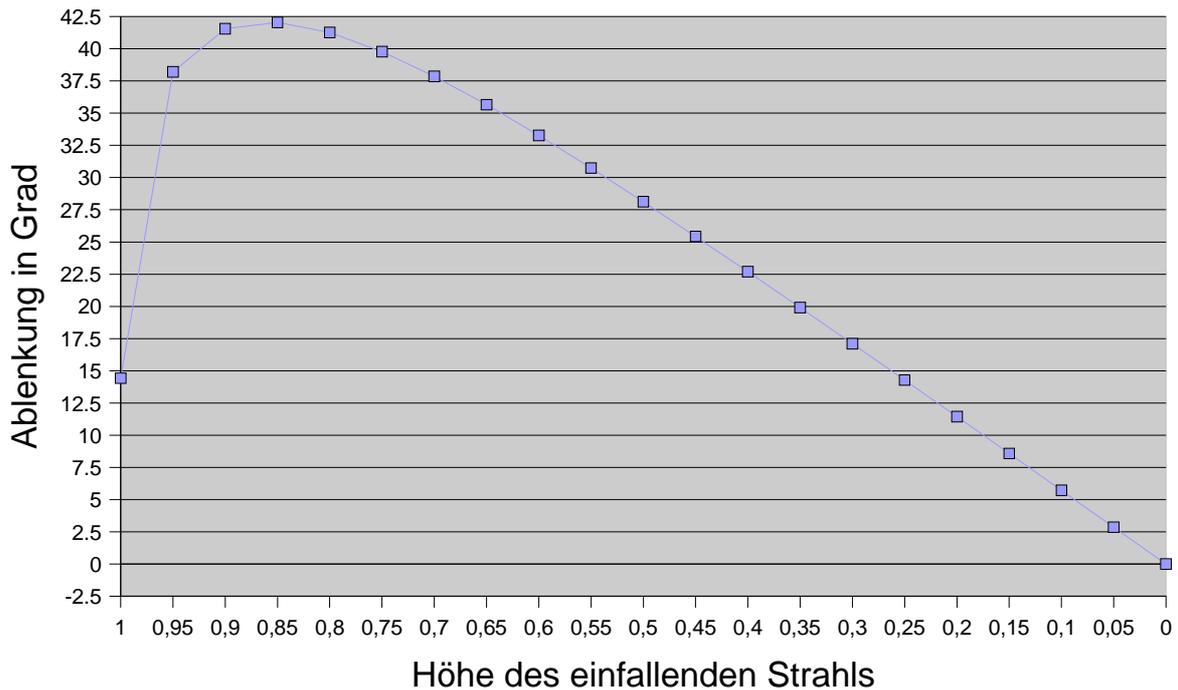
Bei parallel einfallenden Strahlen auf einen Tropfen mit Radius 1 ergibt sich  $\alpha = \sin^{-1}(h)$ :

$$\gamma = 2 * \left( 2 * \sin^{-1} \left( \frac{\sin(\sin^{-1}(h))}{n} \right) - \sin^{-1}(h) \right) = 2 * \left( 2 * \sin^{-1} \left( \frac{h}{n} \right) - \sin^{-1}(h) \right) \quad (1)$$

Betrachtet man  $\gamma$  abhängig von der Höhe des einfallenden Strahls, ergibt sich folgende Kurve (nur Betrachtung der oberen Hälfte des Tropfens,  $n=1.333$ ):

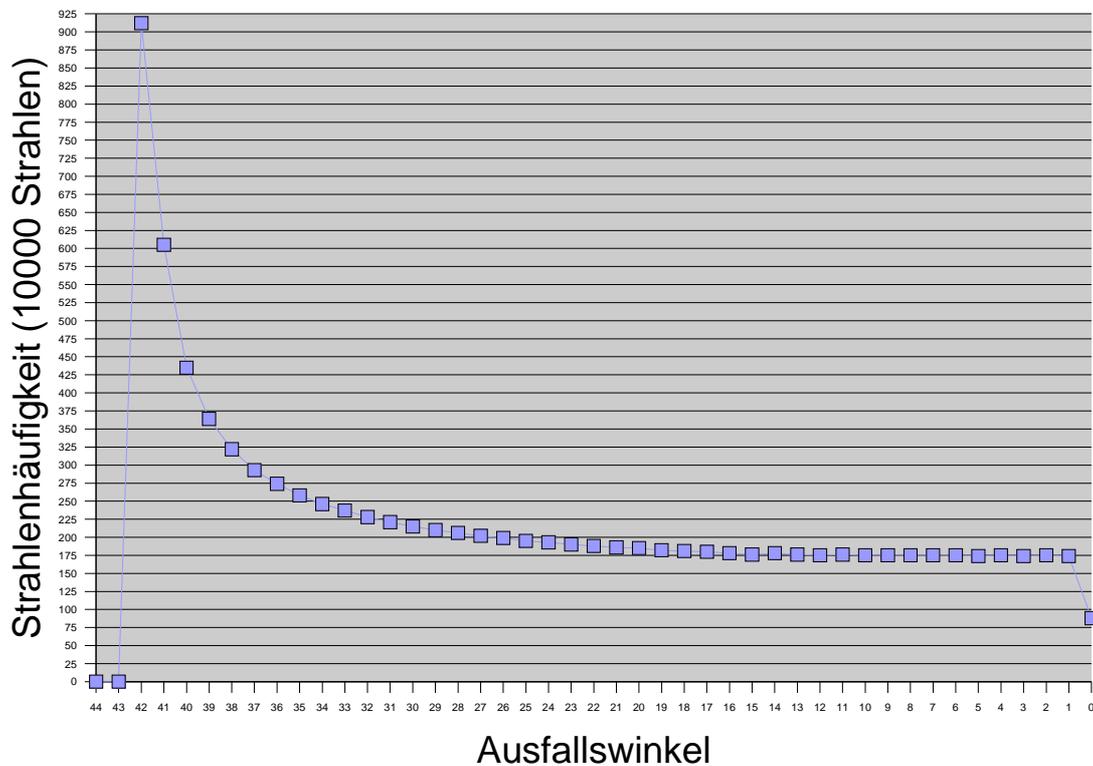
Die Höhe, wo die maximale Ablenkung stattfindet erhält man, wenn man die erste Ableitung von

## Ablenkung bei verschiedenen Höhen



(1) = 0 setzt. Sie ist ca 0.860835. Setzt man diesen Wert in (1) ein, so erhält man die maximale Ablenkung. Sie beträgt ca 42.0781°. Bei diesem Ausfallswinkel hat es zugleich die grösste Anzahl ausfallender Strahlen, wie folgende Grafik veranschaulicht.

## Strahlenhäufigkeit beim Hauptregenbogen



(Bemerkungen:

1. Die Gerade zwischen 43° und 42° sollte vertikal sein; sie ist es nicht, weil die Auflösung nur 1°

beträgt.

2. Dass der Graph ganz rechts nochmals absinkt ist darauf zurückzuführen, dass bei  $1^\circ$  alle Strahlen im Bereich  $0.5^\circ < \gamma \leq 1.5^\circ$  mitgezählt werden, während für  $0^\circ$  nur die Strahlen im Bereich  $0^\circ < \gamma \leq 0.5^\circ$  gezählt werden.

3. Man beachte, dass auf der x-Achse links der grösste Winkel ist)

Zur Erstellung wurde das Programm RayQuantity verwendet (Anhang). Die Werte wurde ausserhalb des Programms mit StarCalc verarbeitet. Es wurden 10000 waagrecht einfallende Strahlen mit regelmässig zunehmender Einfallshöhe zwischen 0 und 1 (obere Hälfte des Regentropfens) durchgerechnet.

b) Nebenregenbogen

- $\alpha$ : Einfallswinkel

- $\beta$ : Berechnung nach Snellius

- $\delta = 180^\circ - 2\beta$ , weil die Summe der Innenwinkel im Dreieck  $180^\circ$  beträgt

- $2\varepsilon = 360^\circ - 3\delta$ , weil die Summe der Innenwinkel im Viereck  $360^\circ$  beträgt

- $90^\circ - \varepsilon$  lässt sich berechnen, weil die Summe der Innenwinkel im Dreieck  $180^\circ$  ist und ein  $90^\circ$  Winkel vorhanden ist

- $3\beta$  lässt sich berechnen aus  $180^\circ - (90^\circ - \varepsilon) = 90^\circ + \varepsilon = 90^\circ + (360^\circ - 3\delta)/2 = 270^\circ - 3/2 * \delta = 270^\circ - 3/2 * (180^\circ - 2\beta) = 3\beta$  (zuerst wird für  $\varepsilon$   $\delta$  eingesetzt, dann für  $\delta$   $\beta$ )

-weil die Summe der Innenwinkel im Dreieck  $180^\circ$  ist, ergibt sich

$$\gamma/2 = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 3\beta = 90^\circ + \alpha - 3\beta$$

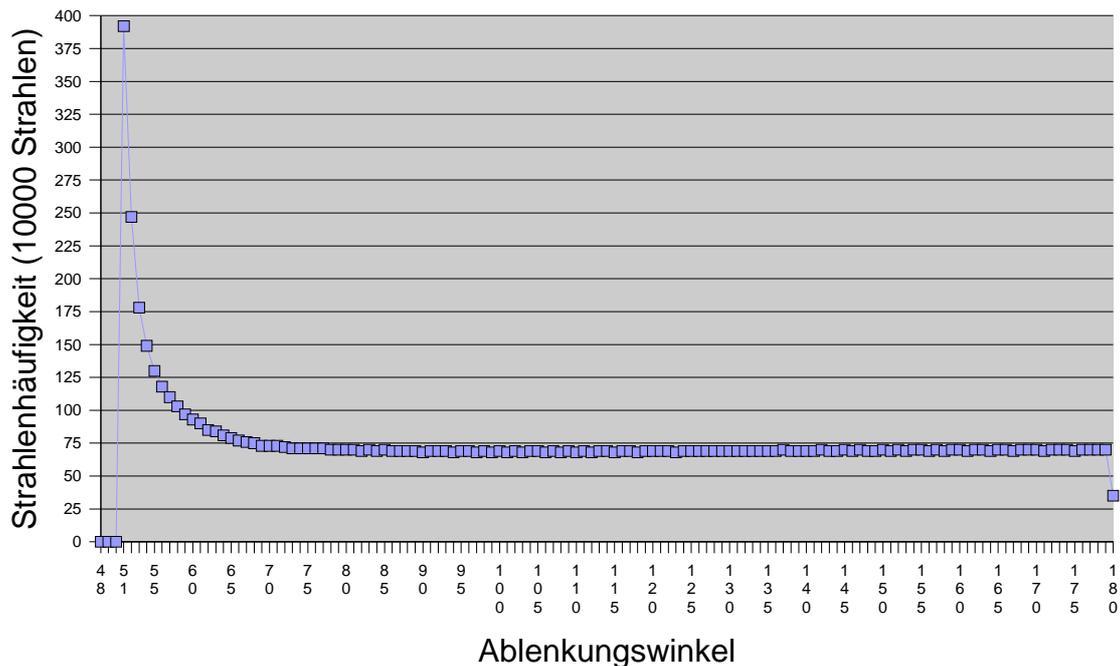
Hier ergibt sich also  $\gamma = 180^\circ + 2\alpha - 6\beta$ . Ersetzt man  $\beta$  durch  $\sin^{-1}(\sin(\alpha)/n)$  ergibt sich  $\gamma = 180^\circ + 2\alpha - 6(\sin^{-1}(\sin(\alpha)/n))$ .

Abhängig von der Höhe eines einfallenden Strahls ist also ( $\alpha = \sin^{-1} h$ ):

$$\gamma = 180 + 2 * \sin^{-1}(h) - 6 * \left( \sin^{-1} \left( \frac{h}{n} \right) \right) \quad (2)$$

Die Höhe der minimalen Ablenkung erhält man, indem man die Ableitung 0 setzt. Die Höhe beträgt ca 0.950205. Setzt man sie in (2) ein, so erhält man für den minimalen Ablenkungswinkel  $50.8908^\circ$ . Diesmal gibt es zwar noch grössere Ablenkungen, aber keine geringeren. Die x-Koordinaten sind diesmal nach rechts aufsteigend.

## Strahlenhäufigkeit beim Nebenregenbogen



### 3.2 Lage des Regenbogens auf der Regenebene

Die Lage des Regenbogens kann nicht eindeutig bestimmt werden, denn sie ist vom Standort des Beobachters abhängig. Bewegt sich der Beobachter, so verändert sich auch die Lage des Regenbogens.

Betrachtet man mehrere parallele Strahlen, die in regelmässigem Abstand auf einen Regentropfen fallen, einmal reflektiert werden und den Regentropfen wieder verlassen, so sind die Winkel vom einfallenden Strahl zum ausfallenden Strahl unterschiedlich. Es gibt aber bei  $42^\circ$  ein Maximum an ausfallenden Strahlen, weshalb der Beobachter den Hauptregenbogen immer bei  $42^\circ$  wahrnimmt. Zeichnet man alle Punkte bei einem Winkel von  $42^\circ$  auf der Regenebene, ein, so ergibt sich ein Kreis. Dieser Kreis ist umso kleiner, je näher die Ebene beim Beobachter ist. Der Regenbogen hat also die Form eines Kegels, dessen Spitze sich beim Beobachter befindet, weshalb dieser den Regenbogen nur als Kreis wahrnimmt. Der Beobachter sieht aber nur den ganzen Kreis, wenn er sich in genügender Höhe befindet. Steht der Beobachter direkt auf der Erdoberfläche, so sieht er nur einen Teil des Regenbogens, wie folgende Graphik veranschaulicht.

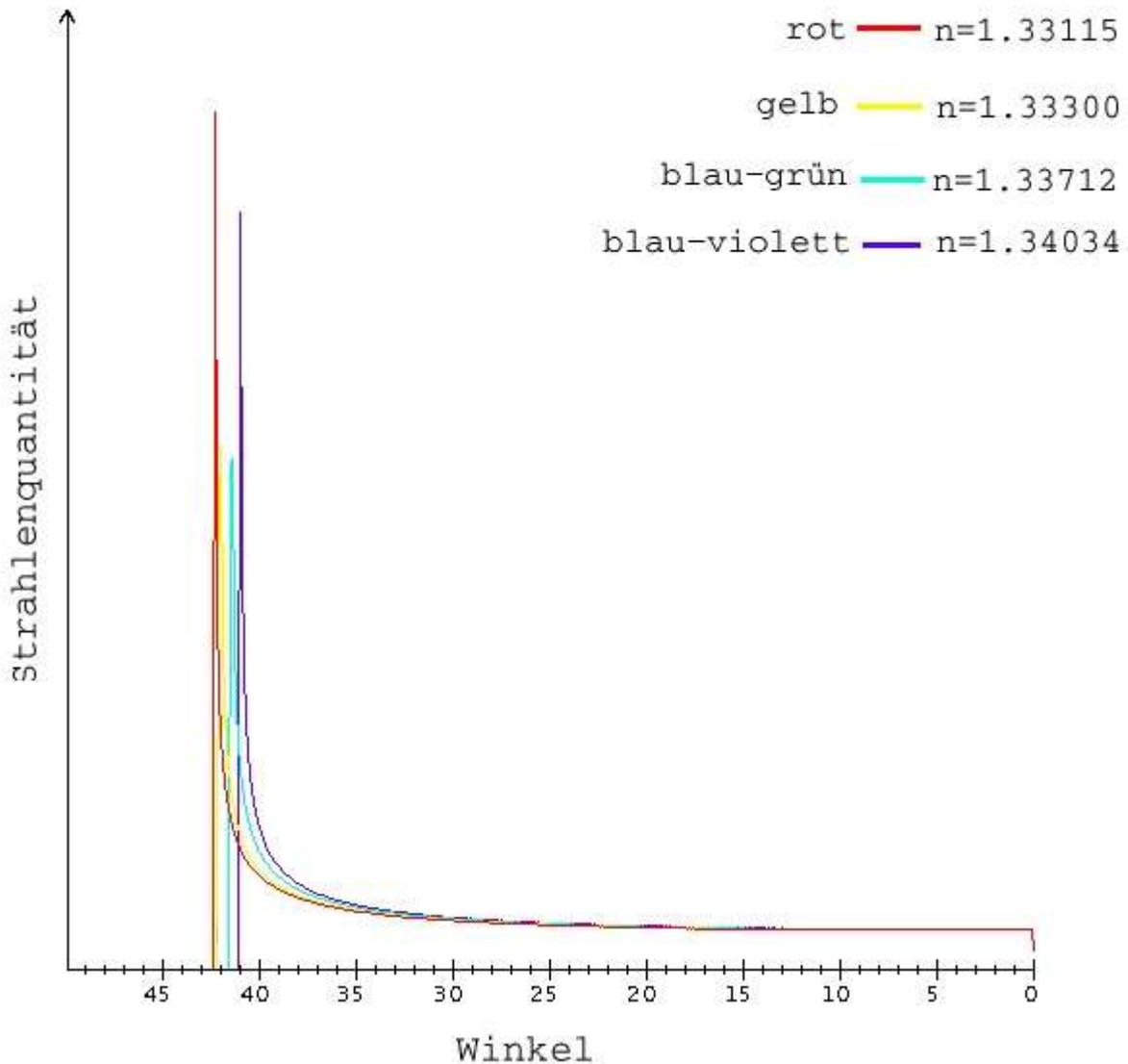


*Der Regenbogen erscheint 2-dimensional, obwohl er eigentlich 3 Dimensionen besitzt*



nicht für jede Farbe gleich ist.

Betrachtet man die Strahlenintensität abhängig vom Ausfallswinkel bei verschiedenen Farben, so ergibt sich beim Hauptregenbogen folgendes Bild:



Bei einem Winkel kleiner als 40° überlagern sich die Farben und ergeben weiss, was erklärt, warum es im inneren des Regenbogens heller ist.

Beim Nebenregenbogen ergäbe sich ein Bild, welches in etwa dem obigen Bild, an der y-Achse gespiegelt, entsprechen würde. Der Brechungsindex  $n$  kommt in (2) negativ vor, weil das Licht im Tropfen zweimal reflektiert wird. Deshalb sind auch die Farben umgekehrt und der helle Bereich ergibt sich bei Winkeln grösser als ca 53°. Somit ist der Bereich zwischen 42° und 51° am dunkelsten, da dort weder bei einfacher noch bei zweifacher Reflexion im Tropfen Strahlen hinfallen.

## **5. Besonderheiten**

### 5.1 Mondregenbogen

Statt der Sonne genügt auch ein Vollmond als Lichtquelle, der Regenbogen erscheint zwar

schwächer, ist aber, da die Umgebung auch dunkler ist, trotzdem sichtbar.

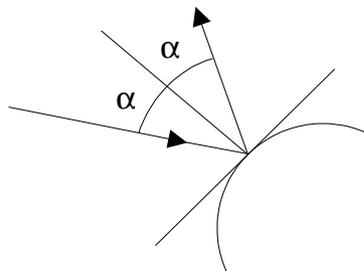
## 5.2 Einbeziehung von Interferenzen

Die bisherigen Betrachtungen entsprachen den Überlegungen die René Descartes bereits im 17. Jahrhundert anstellte. Will man ein genaueres Modell, so muss man noch die Interferenzen zwischen den einzelnen Lichtwellen miteinbeziehen, wie es George Airy im 19. Jahrhundert tat.

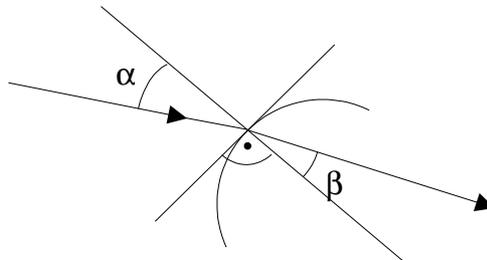
Da durch die Beugung Wellen verschiedener Wellenlänge nahe beieinander liegen, können sich diese durch Interferenzen verstärken oder abschwächen. Die Stärke und Auswirkung der Interferenzen ist abhängig von der größe der Regentropfen. Die Interferenz beeinflusst vor allem die Überlagerung oder genauere Abtrennung der Farben.

### **Anhang 1: Begriffe**

*Reflexion:* Spiegelung am Regentropfen. Dabei wird ein Teil des Lichts zurückgeworfen (Einfallswinkel=Ausfallswinkel) und ein Teil des Lichts durchgelassen.



*Brechung:* Wenn das Licht in ein Medium mit einer anderen Dichte eintritt, verläuft es nicht gerade, sondern es wird gebrochen.



Brechungsgesetz (nach Snellius):  $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1}$

$n_2$  für Luft beträgt 1;  $n_1$  für Wasser beträgt bei gelbem Licht ca. 1.333

*Beugung:* Da der Brechungsindex  $n$  für verschiedene Farben verschieden gross ist, wird das Licht bei der Brechung auch gebogen und in die Spektralfarben aufgespalten, wie man es z.B. bei einem Prisma beobachten kann.

### **Anhang 2: Quellcode des verwendeten Programms**

RayQuantity.java:

-----

```
import java.lang.*;
```

```
public class RayQuantity {  
    public static void main (String args[]) {
```

