

Funktionenschar

Der Funktionsterm von

$$f_k(x) = 3x^2 - \frac{3}{k}x^3$$

enthält neben der Variablen x noch eine weitere Variable k , die Formvariable oder der Parameter. Zu jedem möglichen Wert von k gehört eine Funktion.

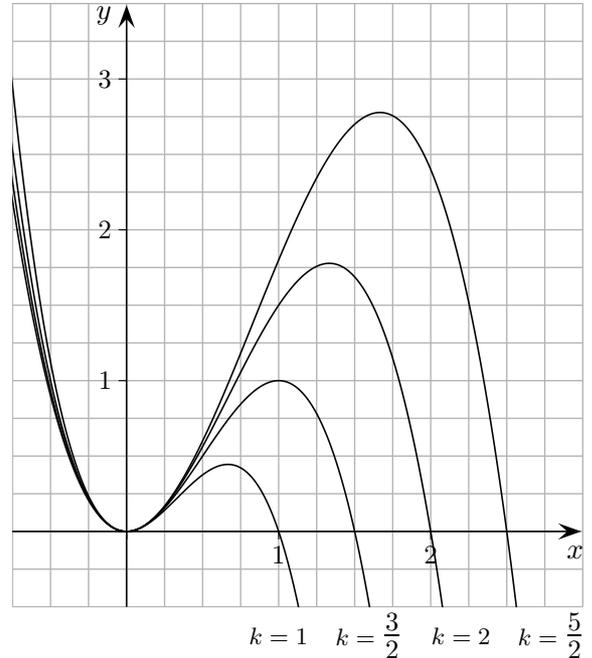
$k = 1$ ergibt die Funktion $f_1(x) = 3x^2 - 3x^3$,

$$k = \frac{3}{2} \quad f_{\frac{3}{2}}(x) = 3x^2 - 2x^3,$$

$$k = 2 \quad f_2(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}x^3.$$

Die Funktionen bilden eine Funktionenschar, ihre Graphen eine Kurvenschar.

Für die Funktionenschar kann eine Kurvendiskussion durchgeführt werden.



Nullstellen:

Bed.: $f_k(x) = 0$

$$3x^2 - \frac{3}{k}x^3 = 0 \quad N_1(0 | 0), \quad N_2(k | 0)$$

$$3x^2 \left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = k$$

Weiter erhalten wir:

$$\text{Min}(0 | 0), \quad \text{Max}\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{9}k^2\right), \quad W\left(\frac{k}{3} \mid \frac{2}{9}k^2\right)$$

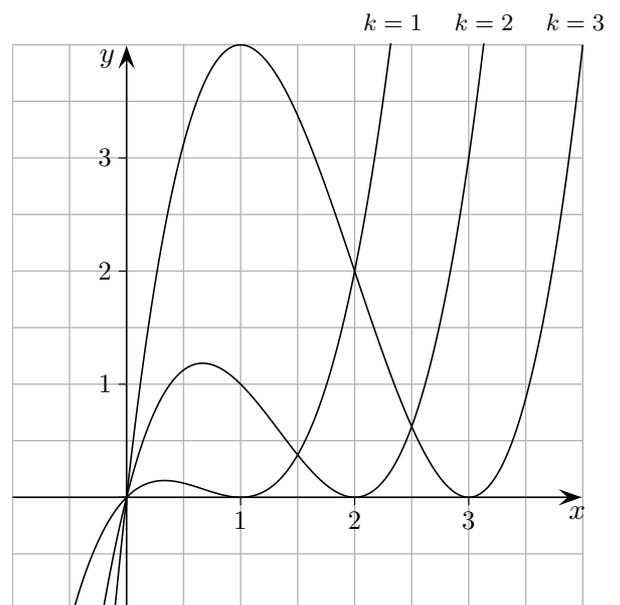
beachte: $f_k''(0) = 6 > 0, \quad f_k''\left(\frac{2}{3}k\right) = -6 < 0$

Aufgabe:

Gegeben sei die Funktionenschar

$$f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x, \quad a > 0$$

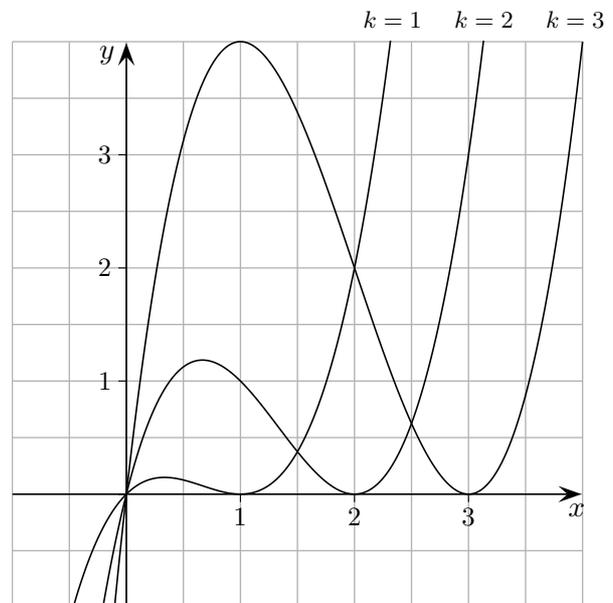
Führe eine Kurvendiskussion durch.



Funktionenschar

Gegeben sei die Funktionenschar

$$f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x, \quad a > 0$$



Kurvendiskussion: $N_1(0 | 0)$, $N_2(a | 0)$

$$\text{Min}(a | 0), \quad \text{Max}\left(\frac{a}{3} \mid \frac{4}{27}a^3\right), \quad W\left(\frac{2}{3}a \mid \frac{2}{27}a^3\right)$$

$$a = 1: \quad N_1(0 | 0), \quad N_2(1 | 0), \quad \text{Min}(1 | 0), \quad \text{Max}\left(\frac{1}{3} \mid \frac{4}{27}\right), \quad W\left(\frac{2}{3} \mid \frac{2}{27}\right)$$

$$a = 2: \quad N_1(0 | 0), \quad N_2(2 | 0), \quad \text{Min}(2 | 0), \quad \text{Max}\left(\frac{2}{3} \mid \frac{32}{27}\right), \quad W\left(\frac{4}{3} \mid \frac{16}{27}\right)$$

Funktionenschar

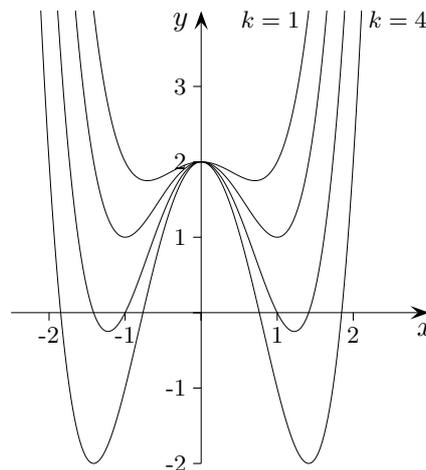
Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - kx^2 + 2$, $k > 0$.

- a) Zeichne die Graphen der Funktionen für $k = 1, 2, 3, 4$.
Welche Symmetrie liegt vor?
- b) Gibt es einen Punkt, der auf allen Graphen der Funktionenschar liegt? (Nachweis)
- c) Ermittle für allgemeines k die Extrema (x - und y -Koordinaten, Min., Max.).
- d) Gibt es einen Wert für k , so dass ein Minimum auf der x -Achse liegt?
- e) Gibt es einen Wert für k , so dass ein Minimum auf der Geraden $y = x$ liegt?
- f) Wie hängt die Anzahl der Nullstellen von k ab?

Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 - kx^2 + 2$, $k > 0$.

- a) Zeichne die Graphen der Funktionen für $k = 1, 2, 3, 4$.
 Welche Symmetrie liegt vor? y -Achsensymmetrie



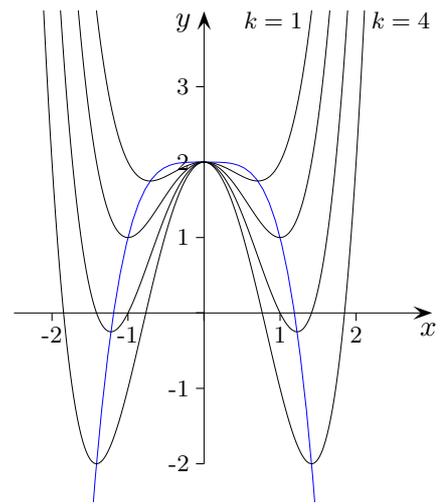
- b) Gibt es einen Punkt, der auf allen Graphen der Funktionenschar liegt? (Nachweis) $P(0 | 2)$, $f_k(0) = 2$
 c) Ermittle für allgemeines k die Extrema (x - und y -Koordinaten, $Min.$, $Max.$).

$$Max(0 | 2), \quad Min_{1/2} \left(\pm \sqrt{\frac{k}{2}} \mid 2 - \frac{k^2}{4} \right)$$

- d) Gibt es einen Wert für k , so dass ein Minimum auf der x -Achse liegt? $k = 2\sqrt{2}$
 e) Gibt es einen Wert für k , so dass ein Minimum auf der Geraden $y = x$ liegt? $k = 2$
 f) Wie hängt die Anzahl der Nullstellen von k ab?

$$\begin{array}{ll} k < 2\sqrt{2} & \text{keine Nullstellen} \\ k = 2\sqrt{2} & 2 \text{ Nullstellen} \\ k > 2\sqrt{2} & 4 \text{ Nullstellen} \end{array}$$

- g) Auf welcher Kurve liegen die Minima?



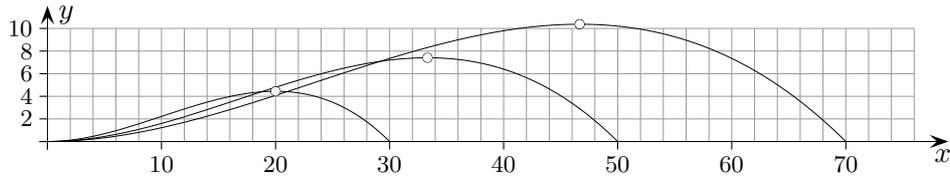
$$g(x) = 2 - x^4$$

Deichquerschnitte

Querschnitte von Deichen werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2, \quad k > 0$$

modelliert (x und $f_k(x)$ in m).



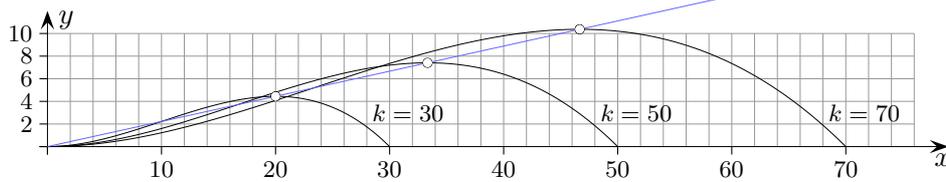
- Bestimme für die Funktionenschar die Nullstellen und den Hochpunkt und ordne die Graphen ihrem jeweiligen k zu.
- Untersuche, ob die drei Hochpunkte (siehe Grafik) auf einer Geraden liegen.
- Überprüfe, ob die Steigung der Graphen der Funktionenschar in den Nullstellen von k abhängig ist.
- Schätze grob ab, wie viel m^3 Material für 1 km Deich, k sei 50, gebraucht wird.

Deichquerschnitte

Querschnitte von Deichen werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -\frac{1}{k^2}x^3 + \frac{1}{k}x^2, \quad k > 0$$

modelliert (x und $f_k(x)$ in m).



- a) Bestimme für die Funktionenschar die Nullstellen und den Hochpunkt und ordne die Graphen ihrem jeweiligen k zu.

$$x_{N_1} = 0, \quad x_{N_2} = k$$

$$H\left(\frac{2}{3}k \mid \frac{4}{27}k\right)$$

k stimmt mit der 2. Nullstelle überein.

- b) Untersuche, ob die drei Hochpunkte (siehe Grafik) auf einer Geraden liegen.

$$y = \frac{2}{9}x$$

- c) Überprüfe, ob die Steigung der Graphen der Funktionenschar in den Nullstellen von k abhängig ist.

$$f'_k(0) = 0, \quad f'_k(k) = -1$$

- d) Schätze grob ab, wie viel m^3 Material für 1 km Deich, k sei 50, gebraucht wird.

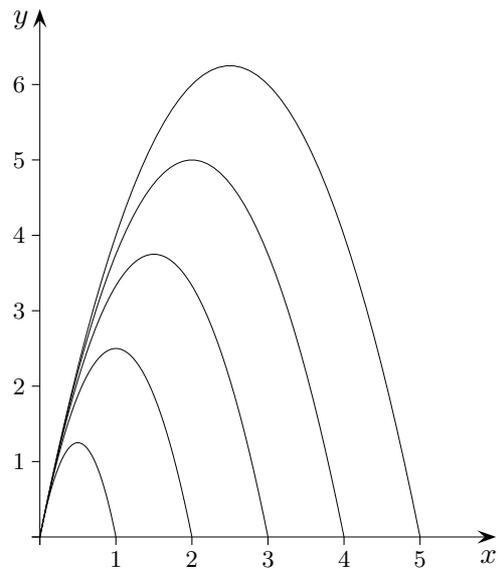
$$200000 \text{ m}^3$$

Fontänen

Die Fontänen eines Springbrunnens werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -kx^2 + 5x, \quad k > 0$$

modelliert. Der Parameter k hängt vom Wasserdruck ab.
Alle Einheiten sind Meter.



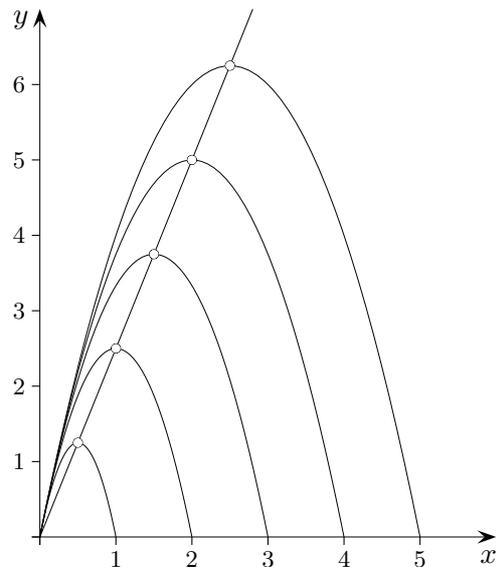
- Welche Beziehung besteht zwischen der rechten Nullstelle einer Fontäne und dem Parameter k ?
- In welchem Winkel wird das Wasser der Fontänen ausgestoßen?
- Entlang welcher Kurve bewegt sich das Maximum der Fontäne, wenn man das Wasser langsam aufdreht?
- In welchem Bereich liegt der Parameter k , falls die Höhen der Fontänen 1 m nicht unterschreiten und 2 m nicht überschreiten.

Fontänen

Die Fontänen eines Springbrunnens werden durch die Funktionenschar

$$f_k(x) = -kx^2 + 5x, \quad k > 0$$

modelliert. Der Parameter k hängt vom Wasserdruck ab. Alle Einheiten sind Meter.



- a) Welche Beziehung besteht zwischen der rechten Nullstelle einer Fontäne und dem Parameter k ? $x_{N2} = \frac{5}{k}$
- b) In welchem Winkel wird das Wasser der Fontänen ausgestoßen? $f'_k(0) = 5, \quad \alpha = 78,7^\circ$
- c) Entlang welcher Kurve bewegt sich das Maximum der Fontäne, wenn man das Wasser langsam aufdreht? $\text{Max}\left(\frac{5}{2k} \mid \frac{25}{4k}\right), \quad y = \frac{5}{2}x$
- d) In welchem Bereich liegt der Parameter k , falls die Höhen der Fontänen 1 m nicht unterschreiten und 2 m nicht überschreiten. $\left[\frac{25}{8}, \frac{25}{4}\right]$