

Übungen zur Analysis I  
(WS 2016/17)  
11. Übungsblatt (10.1.2017)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag bis 10:30 in der Vorlesung.

**1**

- a) Sei  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  stetig. Beweisen Sie, dass es ein  $x \in [a, b]$  gibt mit  $f(x) = x$  (ein solches  $x$  heißt *Fixpunkt von  $f$* ).
- b) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  gibt, die jeden ihrer Bildwerte genau zweimal annimmt. (10+15 Punkte)

**2** Sei  $\mathbf{Q} = \{r_n \mid n \in \mathbf{N}_0\}$  eine Abzählung und  $H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$  die Heaviside-Sprungfunktion.

- a) Zeigen Sie, dass die Reihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H(x-r_n)}{2^n}$  für jedes  $x \in \mathbf{R}$  absolut konvergiert.
- b) Beweisen Sie, dass  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  streng monoton wächst.
- c) Zeigen Sie, dass  $f$  bei jedem  $x \in \mathbf{Q}$  unstetig ist und bei jedem  $x \notin \mathbf{Q}$  stetig ist. (*Tipp: verwenden Sie die Definition der Stetigkeit und konstruieren Sie obere und untere Schranken für  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$* ). (5+10+10 Punkte)

**3** Überprüfen Sie die Existenz folgender Grenzwerte und berechnen Sie sie gegebenenfalls

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \notin \{0,1\}}} \frac{x^2 - 1}{x|x-1|}, \quad (3) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x|x-1|}, \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + |x - 1|}.$$

(6+6+7+6 Punkte)

**4** Begründen Sie folgende Aussagen mit einem geeigneten sinnvollen mathematischen Modell:

- a) Angenommen, zwei Radfahrer Anna und Bert verwenden denselben schmalen Fahrradweg von  $X$  nach  $Y$ . Anna fährt um 8:30 in  $X$  los und kommt um 11:00 in  $Y$  an. Bert fährt um 8:00 in  $Y$  ab und kommt um 11:30 in  $X$  an, weil er einmal etwas verliert und kurz umkehren muss. Dann müssen sich die beiden auf dem Weg begegnet sein.
- b) Auf dem Äquator gibt es zwei antipodale Punkte, bei denen die Lufttemperatur zu einem fest gewähltem Zeitpunkt übereinstimmt. (10+15 Punkte)

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter

<http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2016-17/Vorlesung.html>