Beispiel für ein divergentes Cauchyprodukt

Gemäß Vorlesung ist das Cauchyprodukt von zwei absolut konvergenten Reihen absolut konvergent. Wir geben hier ein Beispiel dafür, dass das Cauchyprodukt von zwei konvergenten Reihen im Allgemeinen nicht konvergieren muss. Dazu zeigen wir, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}_{=:a_n}$$

konvergiert und dass deren Cauchyprodukt mit sich selbst divergiert.

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, weil $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist (Nachweis der Monotonie: $1 \leq 2 \Rightarrow n+1 \leq n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$).

Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{n-k+1}}.$$

Mit

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}\,\sqrt{b} \leq \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

$$\begin{aligned} |c_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(k+1+n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \to 2 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Demnach ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.