Aufgabe 12 Haus mit Dach

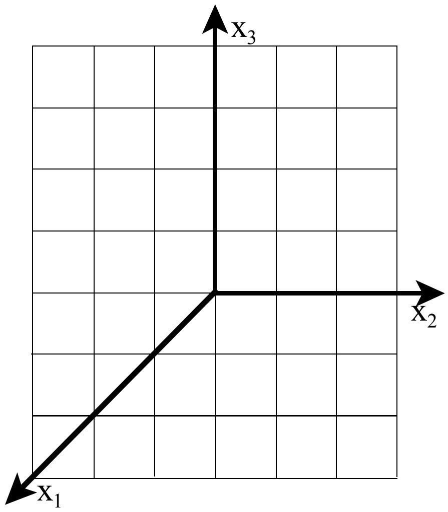
Teile dieser Aufgabe stammen aus der Zentralabiturprüfung 1999 in Baden-Württemberg

Ein quaderförmiges Haus mit aufgesetztem Dach kann in einem Koordinatensystem dargestellt werden mit Hilfe der Eckpunkte des Fußbodens B_i, der Eckpunkte des Fußbodens des Speichers S_i und der Punkte D_i, die den Dachabschluss – ein horizontal liegendes Rechteck – bilden.

Diese Punkte haben folgende Koordinaten (1 LE $\triangleq$ 1 m):

$$B_1\,(0\,|\,0\,|\,0),\quad B_2\,(10\,|\,0\,|\,0),\quad B_3\,(10\,|\,12\,|\,0),\quad B_4\,(0\,|\,12\,|\,0).$$
$$S_1\,(0\,|\,0\,|\,10),\quad S_2\,(10\,|\,0\,|\,10),\quad S_3\,(10\,|\,12\,|\,10),\quad S_4\,(0\,|\,12\,|\,10).$$
$$D_1\,(2\,|\,3\,|\,12),\quad D_2\,(6\,|\,3\,|\,12),\quad D_3\,(6\,|\,9\,|\,12),\quad D_4\,(2\,|\,9\,|\,12).$$

Die Strecken $\overline{S_1D_1}$, $\overline{S_2D_2}$, $\overline{S_3D_3}$ und $\overline{S_4D_4}$ nennt man Grate.



a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Gebäudes samt Dach. (Längeneinheit 1cm $\triangleq$ 1m; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $0{,}5\cdot\sqrt{2}$; Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse 135°).

b) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Grates $\overline{S_2D_2}$ gegen den Fußboden des Speichers.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ und dem Fußboden des Speichers.

d) Ermitteln Sie das Flächenmaß der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$.

Im Punkt $A\,(9\,|\,5\,|\,10)$ wird ein 6 m langer Antennenmast, der das Dach durchstößt, senkrecht auf dem Fußboden des Speichers montiert.

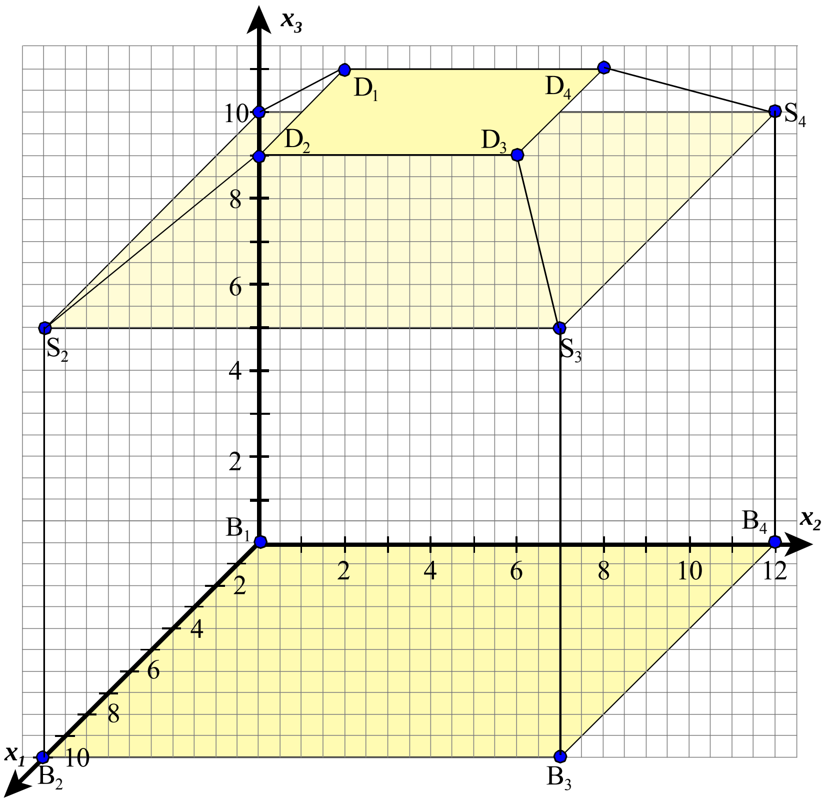
e) Bestimmen Sie die Länge, mit der der Mast ins Freie ragt.

f) Vom Mittelpunkt des Mastes aus ist eine Stütze senkrecht zur Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ angebracht. Ermitteln Sie die Länge der Stütze, wenn sie auf dieser Dachfläche endet.

g) In der Vorderfront des Hauses befindet sich ein Torbogen. Er hat die Form eines Kreisbogens und geht durch die Punkte $K_1\,(10\,|\,3\,|\,0)$, $K_2\,(10\,|\,9\,|\,0)$ und $K_3\,(10\,|\,4\,|\,2)$.
Bestimmen Sie die Höhe des Torbogens.

Aufgabe 12 Haus mit Dach

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>



</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Der Grat $\overline{S_2D_2}$ hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Ebene $\boldsymbol{E_1}$, auf der der Speicherfußboden liegt, ist parallel zur x_1x_2-Ebene; ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den gesuchten Winkel α erhält man aus $\sin\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$ den Winkelbetrag $\alpha \approx 21{,}80°$.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Sei $\boldsymbol{E_2}$ die Ebene, auf der die Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ liegt. Eine Parameterform der Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$

Eine Koordinatenform der Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $x_1 + 2x_3 = 30$.

Mit Hilfe der Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\boldsymbol{E_1}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von $\boldsymbol{E_2}$ und der

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Formel $\cos\alpha = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert}$ erhält man $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und somit $\alpha \approx 26{,}57°$.		15	
d)	Die Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ ist ein Trapez ($S_2S_3 \parallel D_2D_3$). Die Längen der parallelen Seiten: betragen $d(S_2,S_3) = 12$ m bzw. $d(D_2,D_3) = 6$ m. Zur Bestimmung der Höhe kann die Gerade g bestimmt werden, die in $\boldsymbol{E_2}$ verläuft, durch D_2 geht und orthogonal zu S_2S_3 ist. Mit Hilfe des Ansatzes g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\\12\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\1\end{pmatrix}$ und der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ erhält man für a den Wert –2. Der Schnittpunkt von g und S_2S_3 ist $S(10\vert 3\vert 10)$. Die Länge der Strecke $\overline{D_2S}$ beträgt $\sqrt{20}$. Die Höhe des Trapezes beträgt also $\sqrt{20}$ m. Damit ergibt sich für das Flächenmaß A der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$: $A = 9\cdot\sqrt{20}\ \text{m}^2 \approx 40{,}25\ \text{m}^2$.		15	
e)	Berechnung des Durchstoßpunktes S des Mastes durch die Dachfläche: Ansatz: $\vec{m} = \begin{pmatrix}9\\5\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Dann gilt für den Durchstoßpunkt: $S\ (9\vert 5\vert 10+r)$. Mit Hilfe der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ ergibt sich $r = 0{,}5$ und damit $S\ (9\vert 5\vert 10{,}5)$. Der Mast ragt also 5,50 m aus dem Dach.		15	
f)	Der Mittelpunkt des Mastes ist $M\ (9\ \vert 5\ \vert\ 13)$. Die Gerade g, die durch M geht und orthogonal zur Dachfläche ist, kann durch folgende Parameterform angegeben werden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}9\\5\\13\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Für den Endpunkt E der Stütze gilt demnach $E\ (9+r\ \vert\ 5\vert\ 13+2r)$. Mit Hilfe der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ erhält man für $r = -1$ und damit E (8 | 5 | 11). Die Länge der Strecke $\overline{ME}$ beträgt $\sqrt{5}$. Somit ist die Stütze ca. 2,24 m lang.		15	
g)	Der Mittelpunkt des Kreises, auf dem der Torbogen liegt, ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{K_1K_3}$ und von $\overline{K_1K_2}$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{K_1K_3}$ geht durch den Mittelpunkt $M\ (10\vert 3{,}5\vert 1)$ von $\overline{K_1K_3}$ und hat $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor. Geradengleichung: m_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\3{,}5\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Eine Geradengleichung der Mittelsenkrechten von $\overline{K_1K_2}$ ist: m_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden und damit der Mittelpunkt des Kreises ist $K\,(10 \mid 6 \mid -0{,}25)$. Der Radius r des Kreises ist der Abstand von K zu K_1, also $r = \sqrt{9{,}0625} \approx 3{,}01$. Da sich der Mittelpunkt des Kreises 0,25 m unter dem Erdboden befindet, hat der Torbogen eine Höhe von 2,76 m.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20