Partialbruchzerlegung

Unknown: www.gute-mathe-fragen.de/user/Unknown

Letzte Änderung: 11.09.2013

Contents

1 Nutzen/Ziel [Integration]

Unter einer gebrochen rationalen Funktion versteht man eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die als Quotient zweier Polynome mit reellen Koeffizienten gegeben ist. Es gilt demnach

$f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$
mit $q(x)$, $p(x) \in Pol\ \mathbb{R}$

dabei beinhaltet der Definitionsbereich D keine Nullstellen des Nennerpolynoms p(x)! Des Weiteren gilt, dass p(x) irreduzibel ist und Grad p(x)>Grad q(x).

Stellt sich nun die Frage nach der Integration einer solchen Funktion, so treten keine Probleme auf, sollten die Polynome von derartiger Gestalt sein:
$q(x) = 1$und $p(x) = x^n$
Die Stammfunktion F_1 der Funktion f_n für n=1 ist uns wohl bekannt.

$f_1(x) = \frac{1}{x^1} \to F_1 = ln(x)$

Auch bereitet F_2 keine größeren Schwierigkeiten:

$f_2(x) = \frac{1}{x^2} \to F_2 = -\frac{1}{x}$

Es ergibt sich, wie sich schnell erkennen lässt:

$f_n(x) = \frac{1}{x^n} \to F_n = -\frac{f_{n-1}}{n-1}$

Genauso einfach lässt sich für n>1 sagen, dass für $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ die Stammfunktion dieses Aussehen hat:

$F(x) = \frac{-1}{n-1} f_{n-1}(x-a)$

Umkehrung: Wir schreiben $t(x) = x - a$ und leiten $F = -\frac{f_{n-1}}{n-1} t(x)$ ab (Kettenregel; t'(x)=1)

$F'(x) = \left(-\frac{f_{n-1}}{n-1} t\right)' = f_n(t(x)) \cdot t'(x) = f_n(x-a) = f(x)$

Wollen wir aber nun eine Integration einer beliebigen rationalen Funktion $\frac{q(x)}{p(x)}$durchführen, so wird p(x) in seine Linearfaktoren zerlegt und die Partialbruchzerlegung kommt ins Spiel. Mit ihr lässt sich dann obiges Anwenden und damit "einfach" integrieren.

2 Partialbruchzerlegung

Grundsätzlich sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

- Einfache reelle Nullstellen
- komplexe Nullstellen
- mehrfache Nullstellen (hier: reell)

2.1 Rellee Nullstellen (einfach)

Es sei angenommen, dass das Polynom als Linearfaktorzerlegung geschrieben werden kann. Dabei tritt keine Vielfachheit einer Nullstelle auf

$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_m).$

Die zugehörige Partialbruchzerlegung hat dann diese Gestalt.

$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2} + ...$

Die Berechnung soll später geklärt werden.

2.2 Komplexe Nullstellen

Gilt für p(x), dass keine reellen Nullstellen exisitieren, so lässt es sich nicht als Produkt von Linearfaktoren darstellen.

$p(x) = (x^2 + ux_1 + v_1) + ... \; mit \; u, v \in \mathbb{R}$

Man kann das Rechnen mit komplexen Zahlen aber direkt vermeiden, weil mit jeder komplexen Nullstelle z_i auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_i}$ Nullstelle ist.
Anstatt $\frac{a}{x-z_i}$ und $\frac{b}{x-\overline{z_i}}$ lässt sich das ganze auch als ein Term $\frac{c+dx}{x^2+ux+v}$ darstellen, wobei gilt $x^2 + ux + v = (x - z_i)(x - \overline{z_i})$.
Da $x^2 + ux + v$ einer reellen quadratischen Form entspricht, sind auch c und d reell.

2.3 Mehrfache Nullstellen (reell)

Der Nennerterm p(x) sei auf die Form gebracht:

$p(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x - x_m)^{k_m}$ für $k_i > 1$

Eine Vielfachheit der Nullstelle ist hier möglich.
Für den zu wählenden Ansatz gilt folgendes:

$\frac{p(x)}{(x-x_n)^k} = \frac{a}{(x-x_n)} + \frac{b}{(x-x_n)^2} + ... + \frac{z}{(x-x_n)^k}$

3 Verfahren

Eine Partialbruchzerlegung hat folgende Form (hier: einfache reelle Nullstellen)

$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{a}{(x-x_1)} + \frac{b}{(x-x_2)} + ...$

Dabei sind die Koeffizienten im Zähler zu bestimmen und x_n steht für die Nullstellen.
In diesem Kapitel sollen verschiedene Ansätze zur Bestimmung der Koeffizienten dargelegt werden.

3.1. Koeffizientenvergleich
3.2. Zuhaltemethode/Grenzwertmethode
3.3. Einsetzmethode

Die Herangehensweise soll jeweils an einem Beispiel veranschaulicht werden.

3.1 Koeffizientenvergleich

Es sei folgende Funktion gegeben:

$f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^3}$

Man erkennt sofort, dass man hier nach 2.3. vorzugehen hat. Hier liegt eine mehrfache Nullstelle vor!
Es gilt demnach folgender Ansatz:

$\frac{x-1}{(x-2)^3} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{(x-2)^3}$

Mit Anwendung des Koeffizientenvergleichs ist es nun nötig, den gemeinsamen Hauptnenner zu finden und mit diesem zu multiplizieren. Der gemeinsame Hauptnenner ist in unserem Fall $(x-2)^3$.

Es ergibt sich daraus eine neue Gleichung, die dieses Aussehen hat:

$x - 1 = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$

Um die Koeffizienten zu vergleichen muss die Gleichung vereinfacht werden.

$1 \cdot x - 1 = a(x^2 - 4x + 4) + b(x-2) + c$
$= ax^2 + (-4a + b)x + (4a - 2b + c)$

Nun können die Koeffizienten verglichen werden, indem man sich folgendes vor Augen führt:

$0 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 1 = ax^2 + (-4a + b)x + (4a - 2b + c)$
$x^2 : \ 0 = a$
$x^1 : \ 1 = -4a + b$
$x^0 : -1 = 4a - 2b + c$

Aus erster Zeile folgt, dass $a = 0$ sein muss. Damit in die zweite Zeile und es folgt $b = 1$. Aus der dritten Gleichung erhält man dann $c = 1$.
Dies wird nun in obige Gleichung eingesetzt und man erhält:

$\frac{x-1}{(x-2)^3} = \frac{0}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3}$

3.2 Zuhaltemethode/Grenzwertmethode

Dieses Verfahren ist bedeutend schneller als der Koeffizientenvergleich, doch lässt es sich nur auf Linearfaktoren anwenden. Bei einer mehrfachen Nullstelle ist es mit der Grenzwertmethode nicht getan. Es bietet sich an, die den höchsten Potenzen der Linearfaktoren entsprechenden Unbekannten nach der Grenzwertmethode, die übrigen nach der Koeffizientenvergleichsmethode zu bestimmen.
Auch hier sei an einem Beispiel das Vorgehen veranschaulicht.
Gegeben sei folgendes:

$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

Wir haben hier nur einfache reelle Nullstellen und somit lassen sich beide Koeffizienten nach der Grenzwertmethode bestimmen.
Um a zu bestimmen, werden beide Seiten mit dem zugehören Linearfaktor (hier: (x-1)) multipliziert. Es wird sogleich gekürzt und folgendes bleibt stehen:

$\frac{2x+3}{x+1} = a + \frac{b(x-1)}{x+1}$

Nimmt man nun den Grenzwert, sagt $x \to 1$, so ergibt sich:

$\frac{2+3}{2} = a + b \cdot 0$
Es ergibt sich $a = \frac{5}{2}$.

Für b wird genau dasselbe Verfahren verwendet. Es wird mit dem zugehörigen Linearfaktor (hier: (x+1)) multipliziert und dann der Grenzwert errechnet. Es gilt für $x \to -1$

$\frac{-2+3}{-2} = a \cdot 0 + b = -\frac{1}{2}$

Die Partialbruchzerlegung lautet demnach:

$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{5}{2}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)} = \frac{5}{2}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}$

3.3 Einsetzmethode

Mit der Einsetzmethode erzeugt man so viele lineare Gleichungen, wie man unbekannte Koeffizienten angesetzt hat, indem man in die Ansatzgleichung für die Partialbrüche für x beliebige Werte einsetzt ($\in D$). Diese Methode wendet man vorteilhaft an, wenn mit der Zuhaltemethode schon Koeffizienten bestimmt sind und nur noch wenige Koeffizienten unbekannt sind.
Wiederum sei an einem Beispiel das Vorgehen erläutert.

$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x-1)}$

Anmerkung: Mit der Grenzwertmethode lassen sich hier nicht alle Koeffizienten bestimmen. Mittels der Grenzwertmethode ließe sich nur b und c bestimmen.
Es gilt drei Koeffizienten zu bestimmen. Drei Unbekannte fordern drei Gleichungen. Für die Einsetzmethode sei x=-1, x=2 und x=3 gewählt (x=0 oder x=1 dürfen nicht gewählt werden! Sie liegen außerhalb von D).
Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem, das es zu lösen gilt:

$$\begin{array}{ll} x=-1 & : 0 = \frac{a}{-1} + \frac{b}{(-1)^2} + \frac{c}{-2} \\ x=2: & \frac{3}{4} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{1} \\ x=3: & \frac{4}{18} = \frac{a}{3} + \frac{b}{9} + \frac{c}{2} \end{array}$$

In vereinfachter Form:

$$\begin{array}{ll} x=-1: & 0 = -a + b - \frac{1}{2}c \\ x=2: & \frac{3}{4} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + c \\ x=3: & \frac{2}{9} = \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}b + \frac{1}{2}c \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich: a=-2, b=-1, c=2
Die Partialbruchzerlegung lautet demnach:

$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)}$

4 Beispiele

Am einfachsten lassen sich Dinge durch Veranschaulichung wie Beispiele erklären. Es folgen drei Vorrechenbeispiele:
- Einfache Nullstellen, reell
- Reelle Nullstellen
- Komplexe Nullstellen

4.1 Einfache Nullstellen, reell

Integrieren Sie $\frac{x+10}{x^2+5x-14}$!
Um dies zu integrieren sollte man eine Partialbruchzerlegung durchführen. Dafür muss der Nenner zuerst einmal zerlegt werden. Mit der Mitternachtsformel/pq-Formel erhält man die Nullstellen $x_1 = -7$ und $x_2 = 2$.
Die Linearfaktorzerlegung des Nenners ergibt dann: $x^2+5x-14 = (x+7)(x-2)$
Nun kann man für die Partialbruchzerlegung folgendermaßen ansetzen:

$\frac{x+10}{x^2+5x-14} = \frac{a}{x+7} + \frac{b}{x-2}$

Lösungsvoschlag 1: (Grenzwertmethode)
x=-7: Es wird mit (x+7) multipliziert und der Grenzwert $x \to -7$genommen:

$\frac{x+10}{x-2} = a + b \cdot 0$
$\frac{3}{-9} = a$
$a = -\frac{1}{3}$

Für x=2 wird dasselbe gemacht. Aber um das mühsame Schreiben zu ersparen, sei hier erklärt, warum es auch "Zuhaltemethode" heißt.
Für die Zuhaltemethode bedecke man auf der linken Seite (x-2). Rechts betrachte man allein b. Es steht also für das Auge nur noch folgendes da: $\frac{x+10}{(x+7)} = b$
Den Grenzwert $x \to 2$ eingesetzt ergibt das $b = \frac{4}{3}$. Wie sich leicht nachprüfen lässt, ist das korrekt und es erklärt sich sowohl der Name "Zuhaltemethode", wie auch warum es sich um ein so schnelles Verfahren handelt.
Lösungsvoschlag 2: (Einsetzmethode)
Zur Erinnerung:

$\frac{x+10}{x^2+5x-14} = \frac{a}{x+7} + \frac{b}{x-2}$

Es werden nun zwei beliebige Werte für $x \in D$ gewählt, denn es liegen zwei Unbekannte vor, die zwei Gleichungen verlangen.

Es sei x=0 und x=3 gewählt: $\frac{3+10}{3^2+5\cdot3-14} = \frac{a}{3+7} + \frac{b}{3-2}$

$\frac{0+10}{0^2+0-14} = \frac{a}{0+7} + \frac{b}{0-2}$

Es ergeben sich also die beiden Gleichungssysteme:

$\frac{13}{10} = \frac{a}{10} + b$
$-\frac{10}{14} = \frac{a}{7} + -\frac{b}{2}$

Aus diesem LGS ergibt sich die Lösung $a = -\frac{1}{3},\ b = \frac{4}{3}$
Das stimmt mit "Lösungsvorschlag 1" überein ✓
Ergebnis:
Man erhält am Ende:

$\frac{x+10}{x^2+5x-14} = -\frac{1}{3(x+7)} + \frac{4}{3(x-2)}$

Um die Aufgabe abzuschließen wird nun integriert:

$\int \frac{x+10}{x^2+5x-14}dx = \int -\frac{1}{3(x+7)} + \frac{4}{3(x-2)}dx = \left[-\frac{1}{3}ln|x+7| + \frac{4}{3}ln|x-2|\right]$

4.2 Reelle Nullstellen

Partialbruchzerlegung dieses Beispiels:

$\frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2}$

Zu wählender Ansatz:

$\frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$

Mit a=1 und c=2 (aus der Grenzwertmethode) (b lässt sich mit der Grenzwertmethode nicht bestimmen. Ist nun aber einfacher zu bestimmen, da einzige Unbekannte):

$\frac{b}{x+2} = \frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+2)^2}$

Danach versucht man beide Seiten auf den gleichen Nenner zu bringen:

$\frac{b}{x+2} = \frac{(4x^2+9x-4)-(x+2)^2-2(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$
$= \frac{4x^2+9x-4-(x^2+4x+4)+2x-2}{(x-1)(x+2)^2}$
$= \frac{3x^2+3x-6}{(x-1)(x+2)^2}$
$= \frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)^2}$
$= \frac{3}{(x+2)}$

Man sieht also, dass

$\frac{b}{x+2} = \frac{3}{x+2}$

woraus folgt, dass b=3 ist.
Es ergibt sich damit insgesamt:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

4.3 Komplexe Nullstellen

Partialbruchbildung von $\frac{2x^3+5x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+1)}$

Es gilt als erstes zu beachten, dass der Nennergrad nicht größer ist als der Zählergrad! Also Polynomdivision:

$$\frac{2x^3+5x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+1)} = 2 + \frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)}$$

Wir haben eine komplexe Nullstelle und eine einfache reelle Nullstelle. Es gilt daher folgender Ansatz (Der Summand 2 wird nicht weiter betrachtet):

$$\frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Wie beschrieben wird nun der Hauptnenner gebildet und dann geordnet:

$$\frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$
$$= \frac{(a+b)x^2+(2b+c)x+(a+2c)}{(x+2)(x^2+1)}$$

Mit dem Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$x^2 : a + b = 1$
$x^1 : 2b + c = 0$
$x^0 : a + 2c = -1$
$\rightarrow\ a = \frac{3}{5},\ b = \frac{2}{5},\ c = -\frac{4}{5}$

Das Ergebnis ist dann: $\frac{2x^3+5x^2+2x+3}{(x+2)(x^2+1)} = 2 + \frac{1}{5}\frac{3}{x+2} + \frac{1}{5}\frac{2x-4}{x^2+1}$