



Wurzelziehen



Das Wurzelziehen aus komplexen Zahlen ist im Allgemeinen überhaupt nur möglich, wenn die Zahl in trigonometrischer Form oder Exponentialform gegeben ist.

Unter der n -ten Wurzel einer komplexen Zahl z versteht man diejenige Zahl W , deren n -te Potenz gleich z ist



Zwischen dem Wurzelbegriff im Bereich der reellen Zahlen und dem der komplexen Zahlen gibt es einen sehr wichtigen Unterschied:

- Die n -te Wurzel einer reellen Zahl ist eindeutig bestimmt. Sie existiert nur für nichtnegative Radikanden und ist selbst nichtnegativ.
- Jede komplexe Zahl W , für die die Gleichung

$$\sqrt[n]{z} = W \quad \Leftrightarrow \quad W^n = z$$

gilt, ist eine n -te Wurzel von z . insgesamt existieren für jede Zahl z genau n Wurzeln, d.h., die komplexe Wurzel ist nicht eindeutig.

Definition 1:

Für komplexe Zahl z

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

ist die n -te Wurzel gegeben durch

$$\begin{aligned} W_k &= (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} \right) \right] = \\ &= \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Wurzelziehen: Aufgaben 1, 2



Berechnen Sie folgende Wurzeln, und geben Sie die Ergebnisse in arithmetischer Form an:

Aufgabe 1: $a) \sqrt{1}$, $b) \sqrt[3]{1}$, $c) \sqrt[4]{1}$, $d) \sqrt[6]{1}$

Aufgabe 2: $a) \sqrt[4]{16}$, $b) \sqrt[6]{16}$

$$\sqrt{1} : 1 = 1 + i 0, \quad x = 1, \quad y = 0$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi = 0 + 2k\pi$$

$$1 = e^{i 2k\pi}$$

Wurzelziehen: Lösung 1a

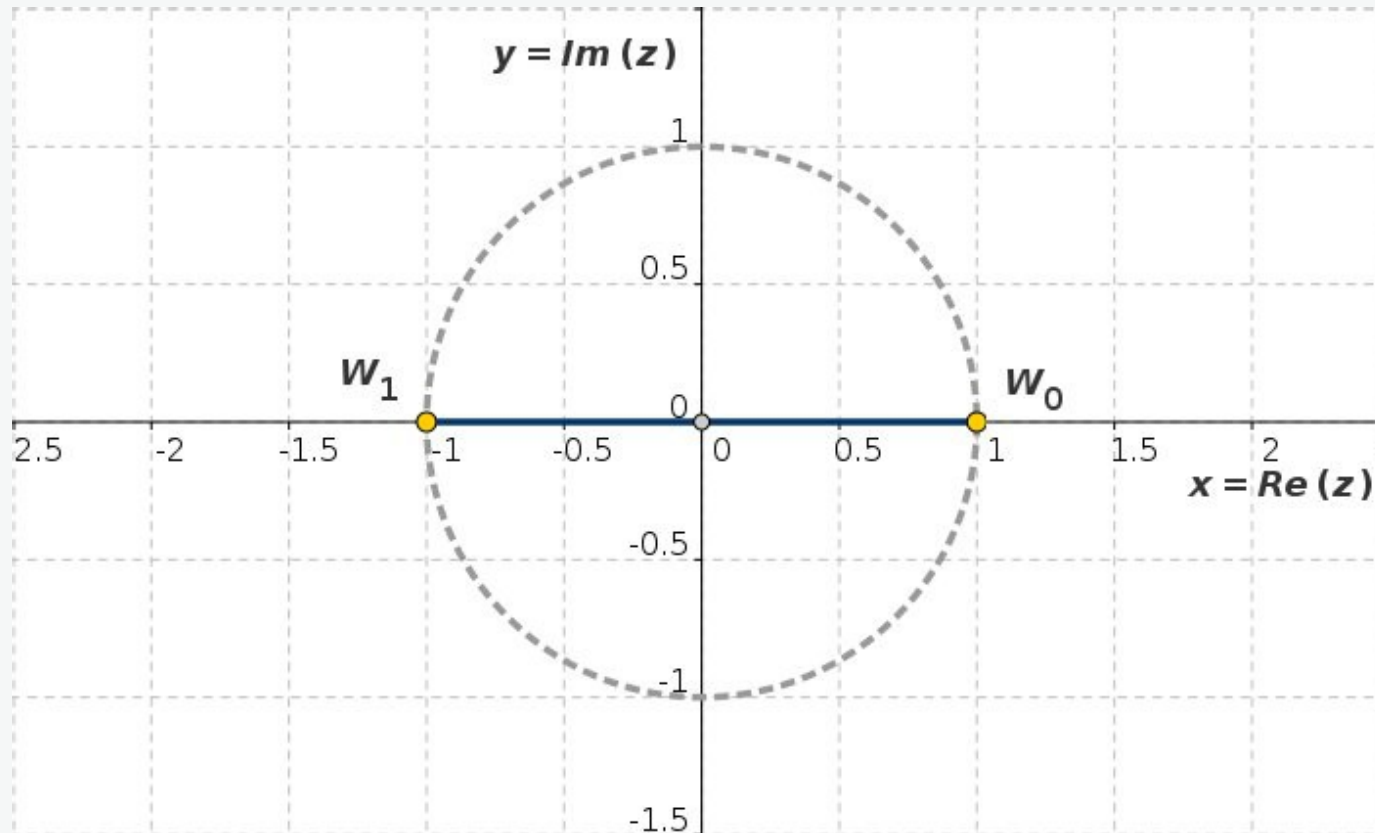


Abb. L1a: Graphische Darstellung der 2. Wurzeln aus 1, die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = 1$ sind reell

$$\sqrt{1} = 1^{\frac{1}{2}} = e^{i k \pi} \quad (k = 0, 1)$$

$$k = 0: \quad W_0 = e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \quad W_1 = e^{i \cdot 1 \cdot \pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

Wurzelziehen: Lösung 1b

$$\sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}} = e^{i \frac{2k}{3} \pi} \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$k = 0: \quad W_0 = e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \quad W_1 = e^{i \frac{2}{3} \pi} = \cos\left(\frac{2}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3} \pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$k = 2: \quad W_2 = e^{i \frac{4}{3} \pi} = \cos\left(\frac{4}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3} \pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Wurzelziehen: Lösung 1b

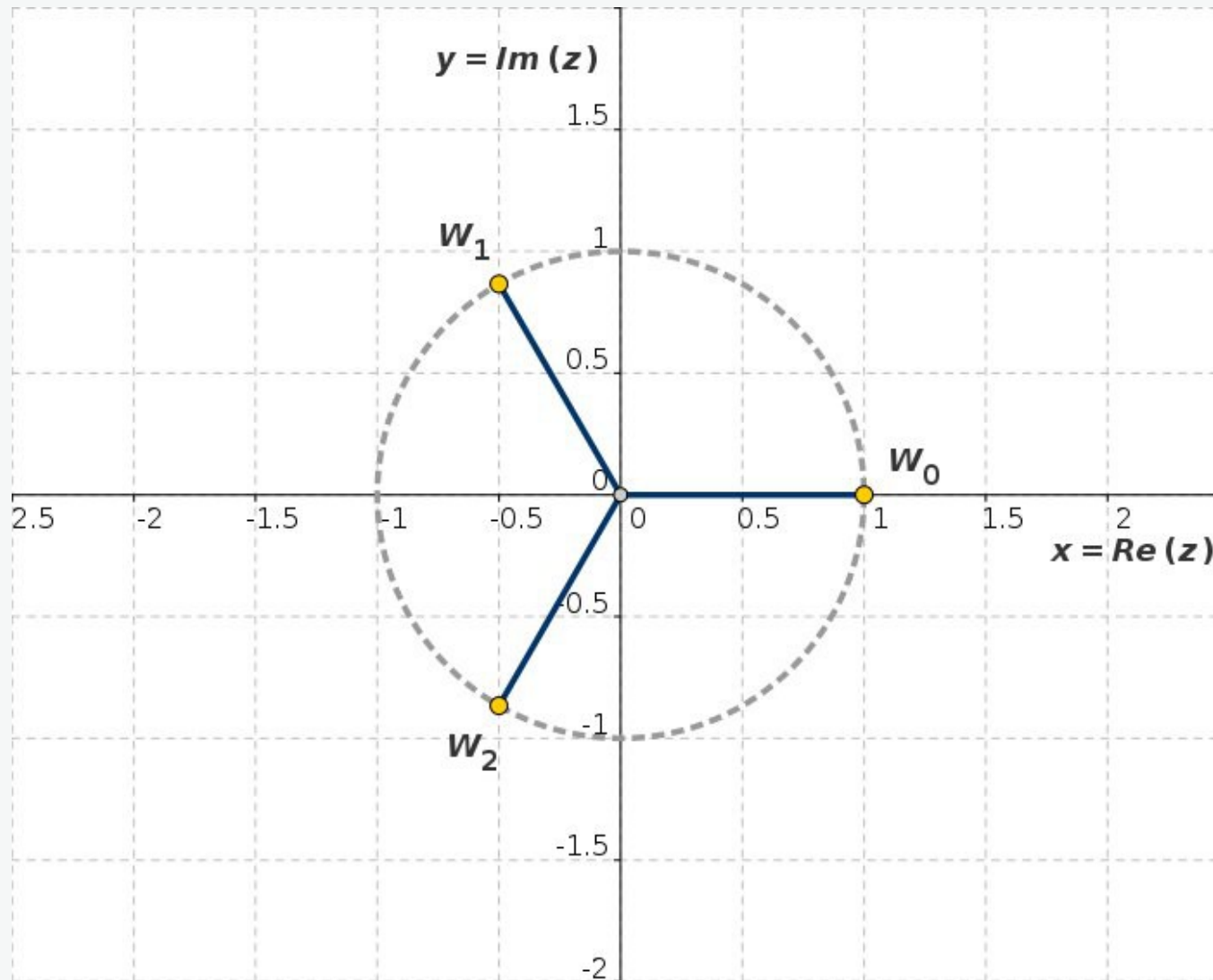


Abb. L1b: Graphische Darstellung der 3. Wurzeln aus 1, die erste Lösung der Gleichung $z^3 = 1$ ist reell, die zwei anderen konjugiert komplex zueinander

$$\sqrt[4]{1} = 1^{\frac{1}{4}} = e^{i \frac{k}{2} \pi} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$k = 0: \quad W_0 = e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \quad W_1 = e^{i \frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$$

$$k = 2: \quad W_2 = e^{i \pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k = 3: \quad W_3 = e^{i \frac{3}{2} \pi} = \cos\left(\frac{3}{2} \pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{2} \pi\right) = 0 - i = -i$$

Reelle Lösungen: W_0, W_2

Imaginäre Lösungen: W_1, W_3

Wurzelziehen: Lösung 1c

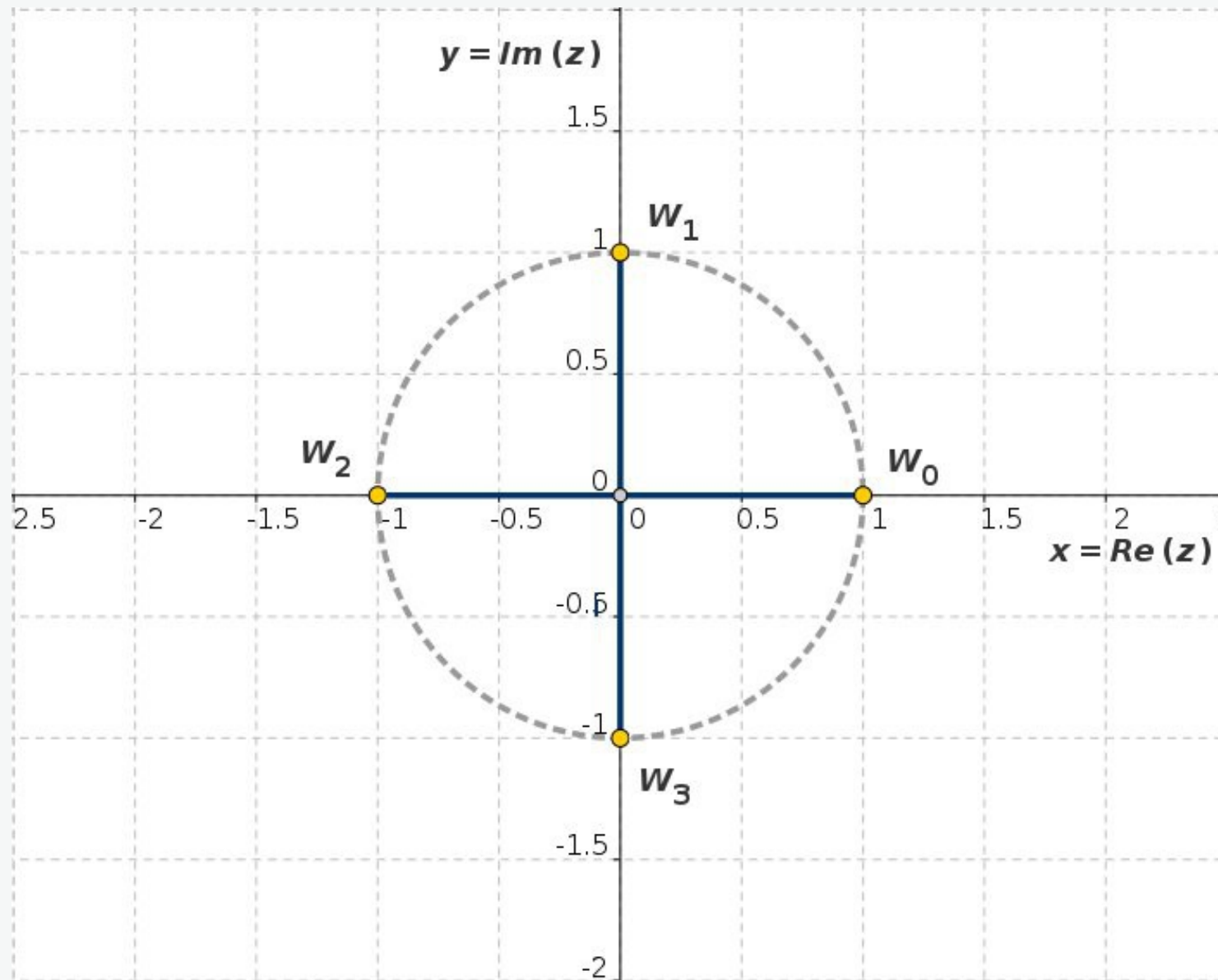


Abb. L1c-1: Graphische Darstellung der 4. Wurzeln aus 1

Wurzelziehen: Lösung 1d

$$\sqrt[6]{1} = 1^{\frac{1}{6}} = e^{i \frac{k}{3} \pi} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$k = 0: \quad W_0 = e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: \quad W_1 = e^{i \frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{1 + \sqrt{3} i}{2}$$

$$k = 2: \quad W_2 = e^{i \frac{2}{3} \pi} = \cos\left(\frac{2}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3} \pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{-1 + \sqrt{3} i}{2}$$

$$k = 3: \quad W_3 = e^{i \pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k = 4: \quad W_4 = e^{i \frac{4}{3} \pi} = \cos\left(\frac{4}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3} \pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = -\frac{(1 + \sqrt{3} i)}{2}$$

$$k = 5: \quad W_5 = e^{i \frac{5}{3} \pi} = \cos\left(\frac{5}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3} \pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{1 - \sqrt{3} i}{2}$$

Reelle Lösungen: W_0, W_3

Konjugiert komplexe Lösungen: $W_2, W_4; W_1, W_5$

Wurzelziehen: Lösung 1d

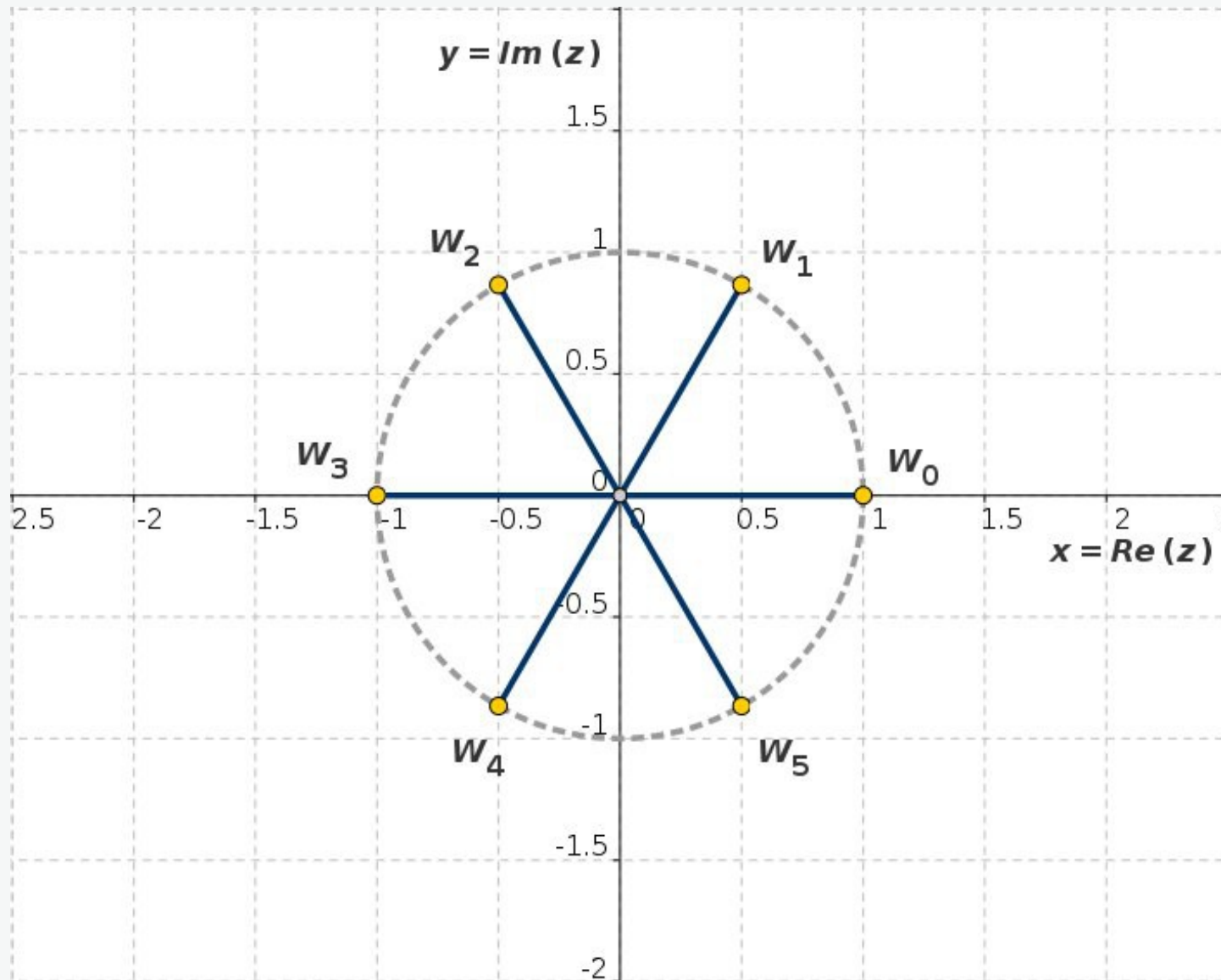


Abb. 1-4a: Graphische Darstellung der 6. Wurzeln aus 1

Wurzelziehen: Lösung 1d

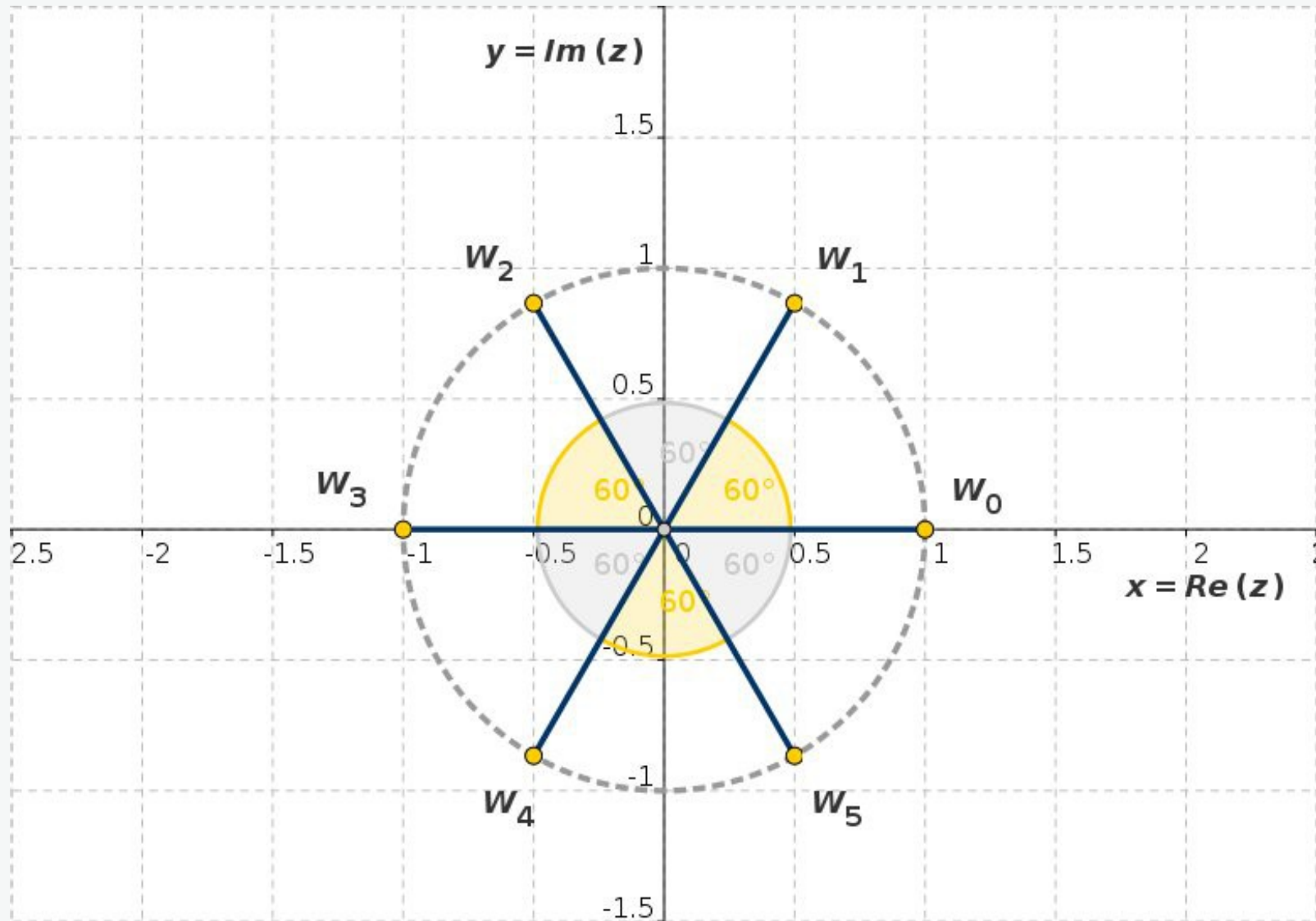


Abb. L1-c2: Graphische Darstellung der 6. Wurzeln aus 1

Wurzelziehen: Lösung 2a

$$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2 e^{i \frac{k}{2} \pi} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$k = 0: \quad W_0 = 2 e^{i \cdot 0 \cdot \pi} = \cos 0 + i \sin 0 = 2$$

$$k = 1: \quad W_1 = e^{i \frac{\pi}{2}} = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2(0 + i) = 2i$$

$$k = 2: \quad W_2 = 2 e^{i \pi} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$k = 3: \quad W_3 = 2 e^{i \frac{3}{2} \pi} = 2 \left(\cos \left(\frac{3}{2} \pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{2} \pi \right) \right) = 2(0 - i) = -2i$$

Reelle Lösungen: W_0, W_2

Imaginäre Lösungen: W_1, W_3

Wurzelziehen: Lösung 2a

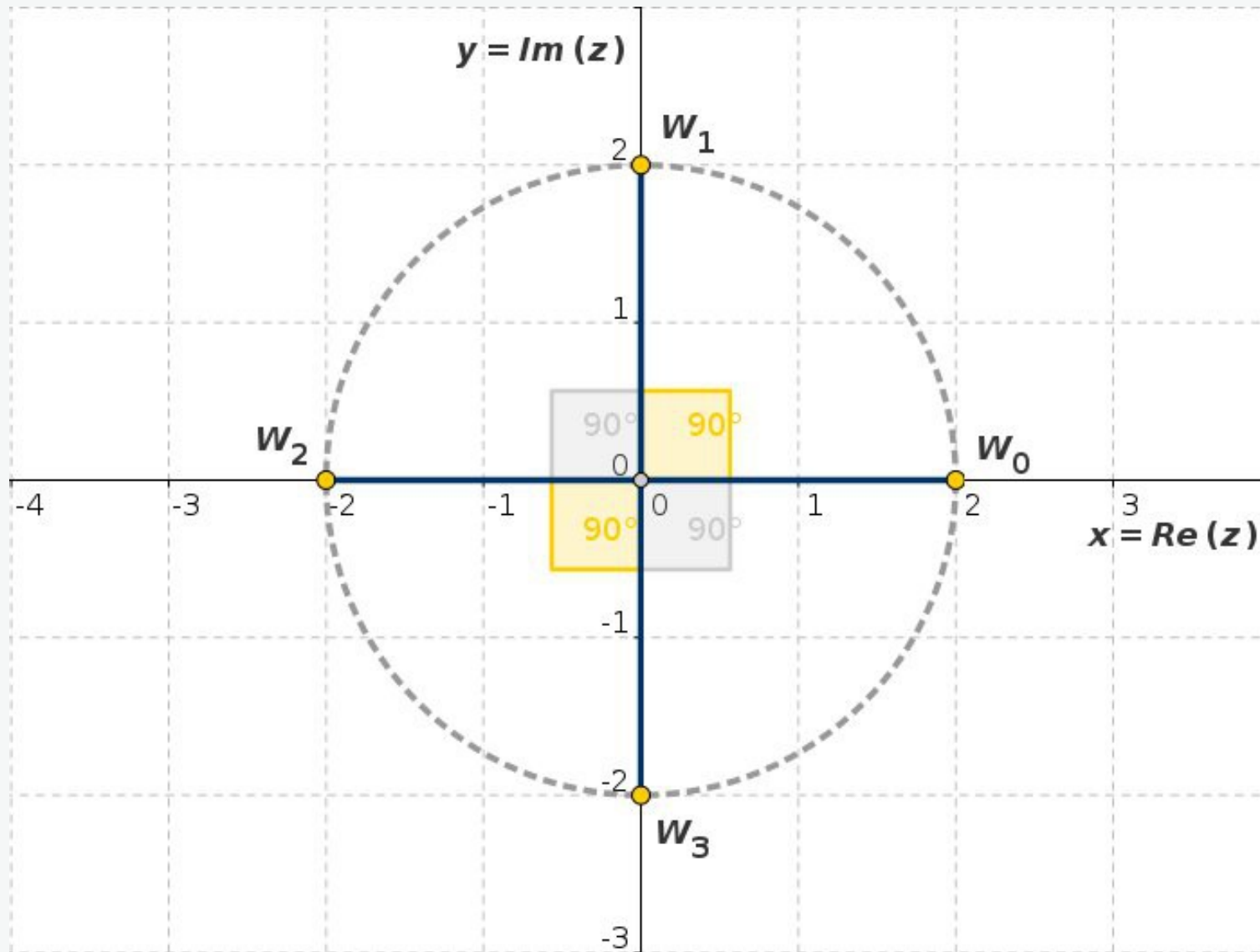


Abb. 2-1: Graphische Darstellung der 4. Wurzeln aus 16

Wurzelziehen: Lösung 2b

$$\sqrt[6]{16} = 16^{\frac{1}{6}} \cdot e^{i \frac{k}{3} \pi} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$k = 0: \quad W_0 = \sqrt[6]{16}$$

$$k = 1: \quad W_1 = \sqrt[6]{16} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$k = 2: \quad W_2 = \sqrt[6]{16} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$k = 3: \quad W_3 = -\sqrt[6]{16}$$

$$k = 4: \quad W_4 = -\sqrt[6]{16} \cdot \frac{(1 + \sqrt{3}i)}{2}$$

$$k = 5: \quad W_5 = \sqrt[6]{16} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Reelle Lösungen: W_0, W_3

Konjugiert komplexe Lösungen: $W_2, W_4; W_1, W_5$

Wurzelziehen: Lösung 2b

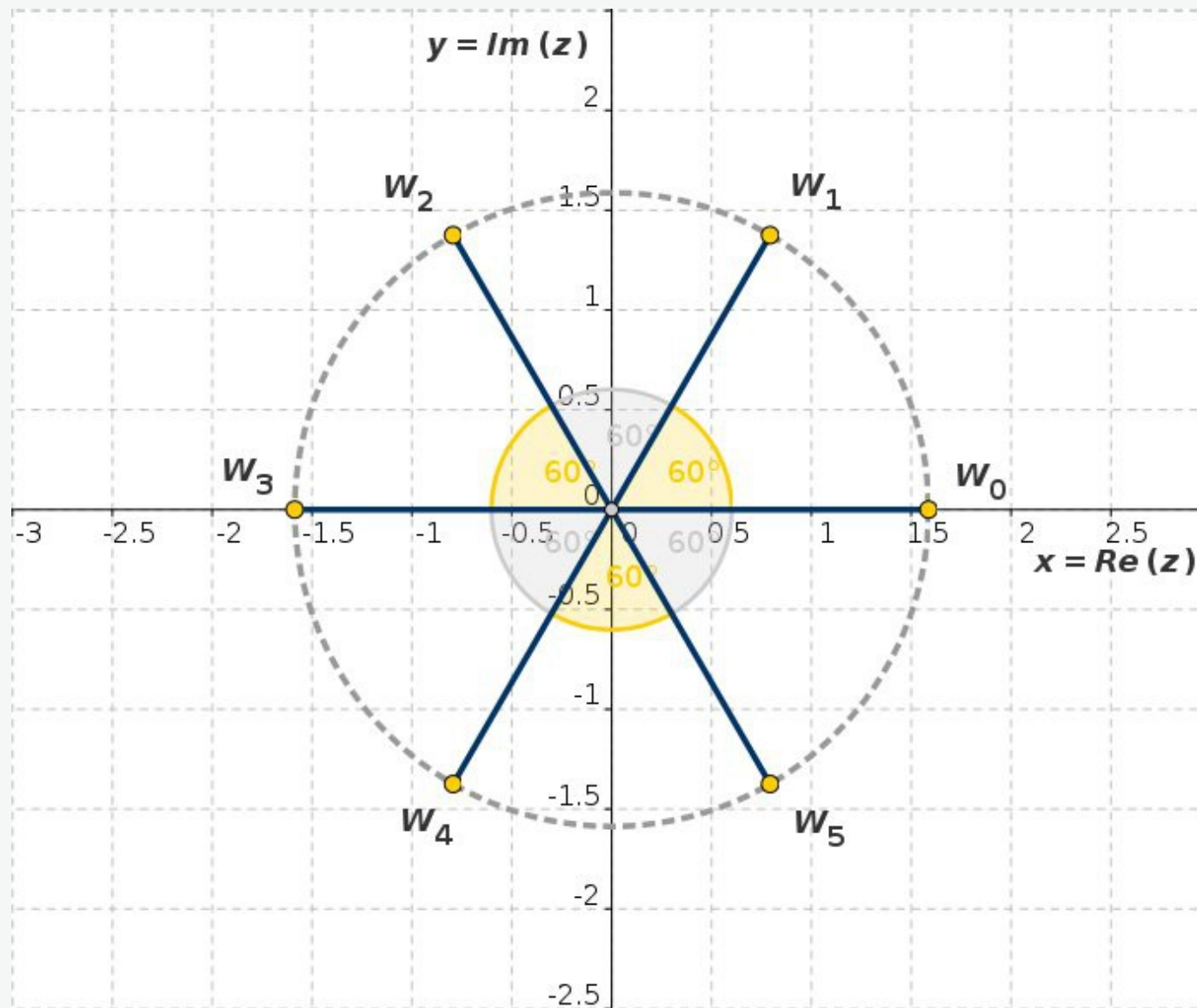


Abb. 2-2: Graphische Darstellung der 6. Wurzeln aus 16