Hausufgabe

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } d = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$U = [a, b, c] \subset \mathbb{R}^3$ sei der von den Vektoren a, b und c aufgespannte Unterraum. Bestimmen Sie die Dimension von U und prüfen Sie, ob $d \in U$ gilt. Berechnen Sie weiter die orthogonale Projektion von d auf den Unterraum U und berechnen Sie den Abstand von d zu U in der euklidischen Norm.

Dimension von U:

Anwendung des Gauß-Algorithmus:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $rg(U) = 2$

$d \in U$?:

Fall $d \in U$ dann gilt $rg(U) = rg(U,d)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \text{II}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Also ist $rg(U,d) = 3$ d.h. $rg(U) \neq rg(U,d)$ deshalb ist $d \notin U$.

Orthogonale Projektion von d auf U:

Für die Orthogonale Projektion brauchen wir $Ker(U)$

$$Ker(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sei $x_3 = \alpha$ dann gilt:

$0 \cdot \alpha = 0$

$\text{I}: x_1 + 2\alpha = 0$

$\boxed{x_1 = -2\alpha}$

$\text{II}: 2\alpha + x_2 = 0$

$x_2 = x_1 = -2\alpha$

Also

$$Ker(U) = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonale projektion :

$$\Pi_u(d) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + 1^2$$
$$= 5$$

$$\Pi_u(d) = -\frac{9}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{18}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$$