Universität Bielefeld

12. Aufgabenblatt — Analysis I

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

a) $$\sin z - \sin w = 2\cos\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}$$

b) $$\cos z - \cos w = -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}$$

Aufgabe 12.2 (2 Punkte)**.** Es sei $R > 0$ und $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Beweisen Sie, dass f beschränkt ist und Minimum und Maximum annimmt.

Aufgabe 12.3 (6 Punkte)**.** a) Es sei $x + iy = e^{i\varphi}$ für $x, y, \varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie

$$\mathrm{Re}(x+iy)^n = \cos(n\varphi) \text{ sowie } \mathrm{Im}(x+iy)^n = \sin(n\varphi).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a)

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Stellen Sie die angegebenen komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar:

i) $z_1 = 1 - i$ ii) $z_2 = -1 + 2i$

d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 1 + i$.

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit in jedem Punkt des Definitionsbereichs und bestimmen Sie ggf. die Ableitung:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x|x|$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \cos(x^2)\exp(-x) + \dfrac{x\sin(x)}{2+x^2}$

c) $f_3 : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^x$

d) $f_4 : (0,1) \to \mathbb{R},\ f_4(x) = \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^\alpha \qquad (\alpha > 0)$