Lösung:

Wieder beweisen wir die Behauptung mit Hilfe der vollständigen Induktion:

1. Induktionsanfang: Wir überprüfen die Aussage für $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^{1}(1+\frac{1}{1+k}) = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2-\frac{1}{2}$$

2. Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass die Behauptung für $n \geq 1$ richtig ist, d.h, es gelte
$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{n+k}) = 2-\frac{1}{n+1}$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+\frac{1}{n+1+k}) = \prod_{k=2}^{n+2}(1+\frac{1}{n+k}) = \prod_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{n+k})(1+\frac{1}{2n+1})(1+\frac{1}{2n+2})$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{n+k})(1+\frac{1}{2n+1})(1+\frac{1}{2n+2})/(1+\frac{1}{n+1})$$

$$\overset{\text{I.A}}{=}(2-\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{2n+1})(1+\frac{1}{2n+2})/(1+\frac{1}{n+1})$$

$$= \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$= \left(\frac{2n+3}{n+2}\right) = \left(\frac{2n+4-1}{n+2}\right) = 2-\frac{1}{n+2}$$

Somit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.