Skript der Vorlesung *Lineare Algebra I*
Prof. Jürgen Bokowski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

LINEARE ALGEBRA I - DIE DETERMINANTE

FLORIAN HOPF, THOMAS OPFER, SEBASTIAN STAMMLER

Inhaltsverzeichnis

1. Definition der Determinantenabbildung

Definition 1.1. Sei $\mathbf{A}_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$ eine beliebige $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$, dann definiert man als Determinante von $\mathbf{A}_n$ eine Abbildung $\det : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

***E1*:** det ist linear in jeder Zeile der Matrix $\mathbf{A}_n$.

***E2*:** Gilt $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) < n$, so folgt: $\det(\mathbf{A}_n) = 0$.

***E3*:** $\det(\mathbf{E}_n) = 1$

Anmerkung.

- Mit „linear in jeder Zeile“ ist folgender Sachverhalt gemeint:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} + a'_{k1} & \cdots & a_{kn} + a'_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1} & \cdots & a'_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{k1} & \cdots & \lambda \cdot a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Die Determinantenabbildung ist eindeutig. (Beweis 4.3)
- Die Determinantenabbildung existiert. (Beweis 4.4)
- Für gewöhnlich schreibt man

$$\det(\mathbf{A}_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

2. Berechnung von Determinanten

Zwar sind Existenz und Eindeutigkeit der Determinantenabbildung gesichert, doch besitzen wir bisher keinerlei „Handwerkszeug“ um eine Determinante konkret auszurechnen.

2.1. **Einfache Determinanten.**

Wir rechnen zunächst als Beispiele die Determinanten von 1×1-, 2×2- bzw. 3×3-Matrizen aus.

Für $\mathbf{A}_1 = (a_{11})$ ist die Berechnung trivial:

$$\det(\mathbf{A}_1) = a_{11} \tag{4}$$

Im Falle $\mathbf{A}_2$ geht man wie folgt vor (siehe auch 3.1):

$$\det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \tag{5}$$

Schließlich kann man auch für den Fall beliebiger 3×3-Matrizen eine Berechnungsformel angeben, die sog. Sarrus-Regel (siehe auch Beispiel 2.3):

Es sei $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, dann gilt für die Berechnung von $\det(\mathbf{A}_3)$ folgendes Merkschema:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \\ \left(\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} \end{array}$$

Will sagen:

(1) Schreibe die ersten beiden Spalten der Matrix nochmals rechts daneben.
(2) Bilde nun das Produkt aller Matrixelemente, welche auf den oben eingezeichneten Linien liegen.
(3) Versehe diese Produkte mit den an den Linien stehenden Vorzeichen und summiere über alle Produkte.

Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{6}$$

Mögen diese 3 Verfahren auch recht praktikabel sein, so gestaltet sich die Berechnung der Determinanten größerer Matrizen durch vergleichbare „Merkregeln“ jedoch als viel zu mühselig. Man bedient sich besserer Verfahren wie z.B. dem, im nächsten Abschnitt zu besprechenden Laplace'schen Entwicklungssatz. Mit eben diesem beweist man auch am besten die Richtigkeit obiger Regeln.

2.2. **Der Laplace'sche Entwicklungssatz.**

Mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes ist es möglich, die Determinanten beliebig großer Matrizen zu berechnen. Es muss allerdings betont werden, dass er für zunehmend größer werdende Matrizen viel zu zeitaufwendig ist. Man bedient sich daher allgemein numerischer Methoden.

Doch nun der Satz:

Sei $\mathbf{A}_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$ eine beliebige $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$.

Definition 2.1. Es sei a_{ij} ein beliebiges Element der Matrix $\mathbf{A}_n$. $\mathbf{M}_{ij}$ bezeichne die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, welche aus $\mathbf{A}_n$ durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. Dann nennt man

$$U_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{M}_{ij}) \tag{7}$$

das *algebraische Komplement* zu a_{ij}.

Beispiel 2.1. Sei $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$:

$$U_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$U_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$U_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \qquad \text{usw.}$$

Der Laplace'sche Entwicklungssatz besagt nun:

Bildet man jeweils die Produkte eines Matrixelements a_{ij} und seines algebraischen Komplements U_{ij} einer beliebigen Zeile oder Spalte der Matrix $\mathbf{A}_n$ und summiert über alle diese Produkte auf, so erhält man $\det \mathbf{A}_n$.
Oder mathematisch konkretisiert:

„Entwicklung nach der i-ten Zeile":

$$\det(\mathbf{A}_n) = \sum_{j=1}^{n} U_{ij} \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{M}_{ij}) \cdot a_{ij} \qquad 1 \leq i \leq n \text{ fest aber beliebig} \tag{8}$$

- oder -

„Entwicklung nach der j-ten Spalte":

$$\det(\mathbf{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} U_{ij} \cdot a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{M}_{ij}) \cdot a_{ij} \qquad 1 \leq j \leq n \text{ fest aber beliebig} \tag{9}$$

Das ist natürlich nicht selbstverständlich und muss bewiesen werden (Beweise 4.4 und 4.6).

Beispiel 2.2.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(1. Zeile)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -[(4 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 4)] - 5 \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 4$$

Beispiel 2.3. Es sei: $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Wir berechnen diese Determinante allgemein mithilfe des Entwicklungssatzes:

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{1. Zeile}}{=} a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \tag{11}$$

Das ist offensichtlich genau die Sarrus-Regel, womit diese bewiesen ist.

Abschließend ist zu bemerken, dass der Laplace'sche Entwicklungssatz insbesondere dann sehr nützlich ist, wenn die Determinante viele Nullen enthält. Deren Anzahl lässt sich bisweilen durch die im nächsten Abschnitt zu besprechenden Rechenregeln erhöhen.

2.3. **Rechenregeln für Determinanten.**

(1) Die Determinante einer Matrix $\mathbf{A}_n$ ist gleich der Determinante ihrer *transponierten* Matrix $\mathbf{A}_n^T$.

$$\det(\mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_n^T) \qquad \text{(Beweis 4.5)} \tag{12}$$

(2) Die Determinantenabbildung ist linear in jeder Zeile und Spalte (E1 und Beweis 4.5).
Zeilenlinearität:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+a'_{k1} & \cdots & a_{kn}+a'_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1} & \cdots & a'_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot a_{k1} & \cdots & \lambda\cdot a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Spaltenlinearität:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}+a'_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk}+a'_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda\cdot a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda\cdot a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{16}$$

(3) Die Addition eines beliebigen Vielfachen einer beliebigen Zeile (Spalte) zu einer anderen, ebenfalls beliebigen Zeile (Spalte) (ausgenommen sich selbst!), ändert die Determinante nicht (Beweis 4.1 und 4.5).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+\lambda\cdot a_{i1} & \cdots & a_{kn}+\lambda\cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k}+\lambda\cdot a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nk}+\lambda\cdot a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{18}$$

(4) Das Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) ändert das Vorzeichen der Determinante (Beweis 4.2 und 4.5).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{20}$$

(5) Multiplikationstheorem.

$$\det(\mathbf{A_n B_n}) = \det(\mathbf{A_n}) \cdot \det(\mathbf{B_n}) \tag{21}$$

2.4. **Determinantenberechnung durch Gauß-Verfahren.** Für die Berechnung der Determinanten großer Matrizen ist folgendes Verfahren nützlich:

Sei

$$\det(\mathbf{A}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{22}$$

die zu bestimmende Determinante. Dann bringt man $\det(\mathbf{A}_n)$ durch *elementare Zeilenumformungen* gemäß (17) und (19) in eine *obere Dreiecksform*:

$$(22) \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}_n) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{vmatrix} \tag{23}$$

Bezeichne r die Anzahl durchgeführter Zeilenvertauschungen, dann gilt:

$$\det(\mathbf{A}_n) = (-1)^r \cdot b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{n-1,n-1} \cdot b_{nn} = (-1)^r \cdot \prod_{i=1}^{n} b_{ii} \qquad \text{(Beweis 4.8)} \tag{24}$$

2.5. **Die Leibniz-Regel.** Eine weitere, mehr theoretisch interessante Möglichkeit, Determinanten zu berechnen, ist die *Leibniz-Regel*. Um diese zu verstehen, sind einige Vorüberlegungen angebracht.

Zunächst muss der Begriff *Permutation* geklärt werden:

Unter einer Permutation versteht man eine bijektive Abbildung:

$$\tau : \{1;\ldots;n\} \to \{1;\ldots;n\} \tag{25}$$

einer n-elementigen Menge in sich selbst.

Die Menge aller Permutationen einer n-elementigen Menge (im Folgenden einfach *n-Permutation* genannt) sei $\mathcal{S}_n$.

Es gibt dann genau $n!$ verschiedene n-Permutationen, denn es gibt für das erste Element n mögliche Elemente, auf die es abgebildet werden könnte, für das zweite nur noch $n-1$, usw.

$$|\mathcal{S}_n| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{26}$$

Anschaulich kann man sich die n-Permutationen als die verschiedenen Anordnungen der Zahlen 1 bis n vorstellen.

Es bezeichne $\tau(k)$ das k-te Bild einer beliebigen n-Permutation τ. Also z.B.:

$$\tau : \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{matrix}\right\}$$

$$\tau(1) = 3$$
$$\tau(2) = 1$$
$$\tau(3) = 4$$

usw.

Eine Permutation, welche zwei Elemente i und j vertauscht, bezeichnet man als *Transposition*, im Folgenden mit σ_{ij} bezeichnet. Offensichtlich kann jede beliebige Permutation durch Hintereinanderausführung endlich vieler Transpositionen gebildet werden.

(27)
$$\tau = \sigma_{ij}^1 \circ \ldots \circ \sigma_{ij}^m$$

wobei m die Anzahl der Transpositionen beschreibe.

Beispiel 2.4. Sei $\tau : \{1;2;3;4;5\} \mapsto \{3;1;4;2;5\}$, dann ist

$$\{1;2;3;4;5\} \overset{\sigma_{23}}{\mapsto} \{1;3;2;4;5\} \overset{\sigma_{34}}{\mapsto} \{1;3;4;2;5\} \overset{\sigma_{12}}{\mapsto} \{3;1;4;2;4\}$$

Also

$$\tau = \sigma_{12} \circ \sigma_{34} \circ \sigma_{23}$$

Ist m gerade, so spricht man allgemein von einer *geraden*, ansonsten von einer *ungeraden Permutation*.
Man definiert weiter das sog. *Signum einer Permutation:*

(28)
$$\operatorname{sign}(\tau) = (-1)^m$$

Nun haben wir das gesamte Rüstzeug beisammen, um die Leibniz-Regel zu verstehen. Sie lautet:

(29)
$$\det(\mathbf{A}_n) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot a_{1;\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n;\tau(n)} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i;\tau(i)} \qquad \text{(Beweis 4.9)}$$

Will sagen:

(1) Bilde das Produkt über n verschiedene Matrixelemente, wobei der Zeilenindex i von 1 bis n läuft und der zu einem bestimmten i gehörende Spaltenindex gleich dem i-ten Bild einer bestimmten Permutation τ ist.
(2) Multipliziere dieses Produkt mit dem entsprechenden Signum der Permutation τ.
(3) Mache dies für alle Permutationen $\tau \in \mathcal{S}_n$ und summiere alle auf, um $\det(\mathbf{A}_n)$ zu erhalten.

Beispiel 2.5. Wir berechnen die Determinante einer 3×3-Matrix.
Es gibt $3! = 6$ verschiedene Permutationen der Ziffern 1, 2, 3:

$$\{1,2,3\} \xrightarrow{\tau_i} \left\{\begin{matrix} & m & \operatorname{sign}(\tau) \\ \{1,2,3\} & 0 & 1 \\ \{1,3,2\} & 1 & -1 \\ \{3,1,2\} & 2 & 1 \\ \{3,2,1\} & 3 & -1 \\ \{2,3,1\} & 4 & 1 \\ \{2,1,3\} & 5 & -1 \end{matrix}\right.$$

Eingesetzt in die Leibniz-Regel ergibt dies:

(30)
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A_n}) &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_3} \operatorname{sign}(\tau) \cdot a_{1;\tau(1)} \cdot a_{2;\tau(2)} \cdot a_{3;\tau(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

womit die Sarrus-Regel auf ein neues bewiesen wäre.

3. ANWENDUNGEN

3.1. **Beispiel der Herleitung der Determinante für eine 2×2-Matrix aus ihrer Definition.** Wie bereits gezeigt ist die Determinantenabbildung durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt und existent. Im Folgendem werde ich zeigen, wie man *nur* durch anwenden der Eigenschaften der Determinante die eindeutige Formel für die Determinante einer 2×2-Matrix herleitet.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}+0 & 0+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{E1_1}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0+a_{21} & a_{22}+0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21}+0 & 0+a_{22} \end{vmatrix} \\
&\overset{E1_1}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} \\
&\overset{E2}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \overset{E1_2}{=} a_{11}a_{22}\det\mathbf{E} + a_{12}a_{21}\underbrace{\det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-\det\mathbf{E}} \\
&\overset{E3}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde außerdem ausgenutzt, dass die Determinante beim Vertauschen zweier Zeilen ihr Vorzeichen wechselt. Dies ist ebenfalls zurückführbar auf ihre Eigenschaften (s. 4.2).

3.2. **Die Cramersche Regel.** Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}x = b$. Ist $\det\mathbf{A} \neq 0$ gibt es eine explizite Determinantenformel für die einzelnen Komponenten x_i des Vektors x:

CRAMERsche Regel. Ist $\det\mathbf{A} \neq 0$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}x = b$ gegeben, so gilt für $i = 1,\cdots,n$

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_{i-1}},\, b,\, \mathbf{a_{i+1}},\cdots,\mathbf{a_n})}{\det\mathbf{A}} \tag{31}$$

wobei $\mathbf{a_i} \in \mathbb{K}^n$ den i-ten Spaltenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnen soll. Die im Zähler stehende Matrix ensteht also aus $\mathbf{A}$ indem man den i-te Spaltenvektor durch b ersetzt.

Beweis. Das oben genannte Gleichunssystem lässt sich auch umschreiben in die Form

$$x_1\mathbf{a_1} + \cdots + x_n\mathbf{a_n} = b \tag{32}$$

Nun wollen wir ja an eine Komponente x_i gelangen. Dazu subtrahieren wir b in dieser Gleichung und ziehen die subtrahierten Komponenten von b in den i-ten Summanden:

$$x_1\mathbf{a_1} + \cdots + \underbrace{\begin{pmatrix} x_i a_{1i} - b_1 \\ \vdots \\ x_i a_{ni} - b_n \end{pmatrix}}_{x_i\mathbf{a_i}-b} + \cdots + x_n\mathbf{a_n} = 0 \tag{33}$$

Das bedeutet, dass die Spalten der Matrix

$$\mathbf{C} := (\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_{i-1}},\,(x_i\mathbf{a_i}-b),\,\mathbf{a_{i+1}},\cdots,\mathbf{a_n}) \tag{34}$$

linear abhängig sind[1], ihre Determinante daher Null ist. Wegen der Linearität der Determinantenabbildung in der i-ten Spalte ist

$$\det\mathbf{C} = x_i\det\mathbf{A} - \det(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_{i-1}},\, b,\, \mathbf{a_{i+1}},\cdots,\mathbf{a_n}) = 0 \tag{35}$$

Addieren des Subtrahenden und dividieren durch $\det\mathbf{A}$ liefert das gewünschte Ergebnis. $\square$

Anmerkung. Für große n ist diese Regel sehr unpraktisch, da $n+1$ Determinanten berechnet werden müssen. Jedoch ist sie von großem theoretischen Interesse, da sie z.B. zeigt, dass die Lösung x des Gleichungssystems $\mathbf{A}x = b$, im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *stetig* von den Koeffizienten von $\mathbf{A}$ und b abhängt, betrachtet man zusätzlich die Entwicklungssätze für die Determinante.

[1] Man beachte, dass (33) $\Leftrightarrow \mathbf{C}\,(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)^t = 0$

3.3. **Vandermondesche Determinante.** Wir betrachten eine, zunächst kompliziert scheinende, quadratische Matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ der Form

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} 1 & m_1 & {m_1}^2 & \dots & {m_1}^{n-1} \\ 1 & m_2 & {m_2}^2 & \dots & {m_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & {m_n}^2 & \dots & {m_n}^{n-1} \end{pmatrix} \tag{36}$$

Solch eine Matrix heißt **VANDERMONDEsche Matrix**, benannt nach dem französischem Mathematiker Alexandre Théophile Vandermonde (1735 - 1796). Das Interessante an dieser Matrix ist, dass sich für ihre Determinante ein verblüffender Ausdruck ergibt, die

VANDERMONDEsche Determinante. Seien $m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{V}$ habe die oben beschriebene Form, dann ist

$$\det \mathbf{V} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (m_j - m_i) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (m_j - m_i) \quad . \tag{37}$$

Beweis. Induktionsanfang: Wir Prüfen (37) für $\mathbf{V}_2$, wobei im folgendem der Index angibt, welche Dimension $\mathbf{V}$ haben soll.

$$\det \mathbf{V}_2 = \begin{vmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1 \qquad \surd \tag{38}$$

Induktionsvoraussetzung sei nun (37).

Induktionsschritt: Wir ziehen in $\mathbf{V}$ das m_1-fache der *vor*letzten Spalte von der letzten ab und erhalten

$$\det \mathbf{V}_n \overset{2}{=} \begin{vmatrix} 1 & m_1 & \dots & {m_1}^{n-2} & 0 \\ 1 & m_2 & \dots & {m_2}^{n-2} & (m_2-m_1){m_2}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & m_n & \dots & {m_n}^{n-2} & (m_n-m_1){m_n}^{n-2} \end{vmatrix} \quad . \tag{39}$$

Dieses Verfahren führen wir nun iterativ $(n-1)$ mal durch und erhalten die Determinante einer Matrix, welche in der ersten Zeile als erstes Element die 1, sonst nur Nullen hat. Man beachte, das dies immer noch die Determinante von $\mathbf{V}$ ist, da diese Matrix nur durch elementare Spaltenumformungen aus $\mathbf{V}$ hervor geht. Wir bekommen also

$$\det \mathbf{V}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (m_2-m_1) & (m_2-m_1)m_2 & \dots & (m_2-m_1){m_2}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (m_n-m_1) & (m_n-m_1)m_n & \dots & (m_n-m_1){m_n}^{n-2} \end{vmatrix} \quad . \tag{40}$$

Die so erhaltene Matrix entwickeln wir nun nach der ersten Zeile, was ja besonders einfach ist, und erhalten

$$\det \mathbf{V}_n = 1 \cdot \begin{vmatrix} (m_2-m_1) & (m_2-m_1)m_2 & \dots & (m_2-m_1){m_2}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m_n-m_1) & (m_n-m_1)m_n & \dots & (m_n-m_1){m_n}^{n-2} \end{vmatrix} \quad . \tag{41}$$

In dieser $(n-1)\times(n-1)$-Matrix finden wir in der k-ten Zeile in jedem Eintrag den Faktor $(m_k - m_1)$. Diese $n-1$ Faktoren können wir wegen der Multilinearität der Determinante als Faktoren vor die Determinante ziehen, also

$$\begin{aligned} \det \mathbf{V}_n &= (m_2-m_1)\cdot(m_3-m_1)\cdot\dots\cdot(m_n-m_1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & m_2 & \dots & {m_2}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & \dots & {m_n}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &\overset{Ind.vor.}{=} \prod_{i=2}^{n}(m_i-m_1) \cdot \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(m_j-m_i) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(m_j-m_i) \quad , \end{aligned} \tag{42}$$

denn die Matrix, von der in (43) die Determinante genommen wird ist ja gerade die Vandermondesche Determinante $\mathbf{V}_{n-1}$ mit einer Erhöhung der Indizes um 1. Also laufen im rechten Produkt die Indizes von 2 bis n anstatt von 1 bis $n-1$. Nun liefert das linke Produkt gerade die fehlenden Faktoren für das rechte Produkt um auf den Ausdruck (37) zu gelangen. □

[2]Die Determinante bleibt gleich, da das eine elementare (Spalten-)Umformung ist.

3.4. **Volumen.** Die Determinante erlaubt die Berechnung des Volumens einfacher, d. h. *polyedrischer* Mengen.

3.4.1. *Volumen eines Parallelepipeds und eines Simplexes.* Die Determinante gestattet die Volumenberechnung eines Parallelepipeds, i. A. erhält man das orientierte (vorzeichenbehaftete) Volumen wie in

Satz 3.1. *Man schreibe die n Vektoren, die ein Parallelepiped*

$$\mathcal{P} := \{p \mid p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i,\, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}\}$$

im $\mathbb{R}^n$ aufspannen, als Spaltenvektoren in eine Matrix $\mathbf{P}$*, sodass diese die Gestalt*

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} | & & | \\ p_1 & \dots & p_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

aufweißt. Dann ergibt sich das orientierte Volumen des Parallelepipeds zu $\det \mathbf{P}$*, oder wenn, wie üblich, das Volumen als positiv vereinbart wird, erhält man*

$$\mathrm{Vol}_n(\mathcal{P}) := |\det \mathbf{P}|. \tag{43}$$

Definition 3.1. Ein n-Simplex ist die konvexe Hülle von $n+1$ Punkten. Liegen diese Punkte in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^n$, so spricht man von einem *entarteten Simplex*.

Nun lässt sich auch das Volumen eines *n-Simplexes* berechnen:

Satz 3.2. *Sei ein* n*-Simplex beschrieben durch die $n+1$ Punkte $0, s_1, \cdots, s_n$. Schreibt man nun die Punkte $s_1, \cdots, s_n$ wieder in eine Matrix* $\mathbf{S}$*, dann ergibt sich für das Volumen des Simplexes (hier ohne Beweis)*

$$\mathrm{Vol}_n(\mathit{Simplex}) = \frac{1}{n!} \cdot |\det \mathbf{S}|. \tag{44}$$

Anmerkung. Das n-dimensionale Volumen eines *entarteten n-Simplexes* ist also 0, da dann die das Simplex beschreibenden Vektoren linear abhängig sind.

Da sich polyedrische Mengen (endliche Vereinigungen von konvexen Hüllen endlich vieler Punkte) in endlich viele Simplizes zerlegen lassen, hat man damit einen elementaren Volumenbegriff in beliebigen Dimensionen zur Verfügung, der sich zudem leicht berechnen lässt.

3.4.2. *Volumen von Bildmengen.*

Satz 3.3. *Sei $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*[3] *und* $\mathbf{A}$ *die f beschreibende Matrix. Dann gilt*[4]

$$|\det \mathbf{A}| = \mathrm{Vol}_n(f([0,1)^n)) \tag{45}$$

wobei Vol_n *das n-dimensionale Volumen und* $[0,1)^n$ *den* Einheitswürfel *bezeichnet.*

Daraus folgt sogar Allgemeineres für eine *messbare* Teilmenge $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^n$

Satz 3.4. *Sei $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und* $\mathbf{A}$ *die f beschreibende Matrix. Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(f(\mathbf{S})) = |\det \mathbf{A}| \cdot \mathrm{Vol}_n(\mathbf{S}). \tag{46}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich sogar erweitern auf eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ welche durch die $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{B}$ *beschrieben wird. Dann gilt nämlich*[5]

$$\mathrm{Vol}_n(g(\mathbf{S})) = \sqrt{|\det(\mathbf{B}^T \mathbf{B})|} \cdot \mathrm{Vol}_n(\mathbf{S}). \tag{47}$$

Das bedeutet, dass die *Verzerrung* des Volumens der Menge $\mathbf{S}$ durch die lineare Abbildung f durch die Determinante der linearen Abbildung beschrieben wird.

[3] zur Notation: $L(\mathbf{U}, \mathbf{V}) := \{f \mid f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}, f \text{ linear}\}$ und $f(\mathbf{S}) := \{f(x) \mid x \in \mathbf{S}\}$

[4] nach dem LA I Skript der TU-Wien (empfehlenswert)

[5] nach Wikipedia

4. BEWEISE

In diesem Abschnitt werden wir die Eigenschaften und Sätze zur Determinante in aller mathematischer Strenge und Exaktheit beweisen.

4.1. Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+\lambda\cdot a_{i1} & \cdots & a_{kn}+\lambda\cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{E1}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot a_{i1} & \cdots & \lambda\cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{E2}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{48}$$

Im vorletzten Schritt wurde ausgenutzt, dass die rechte Determinante zwei linear abhängige Zeilen enthält. □

4.2. Vertauschung von Zeilen. Sei $\mathbf{A}_n$ die Ausgangsmatrix, sowie $\mathbf{A}'_n$ die Matrix, welche aus $\mathbf{A}_n$ durch Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile hervorgeht. Wir betrachten die Matrix $\mathbf{B}_n$ mit:

$$\mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{49}$$

Offensichtlich enthält $\mathbf{B}_n$ zwei gleiche Zeilen, somit ist $\mathrm{rg}(\mathbf{B}_n) < n$, womit folgt $\det(\mathbf{B}_n) = 0$. Andererseits ist

$$\det(\mathbf{B}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{E1}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{50}$$

$$\overset{(17)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det(\mathbf{A}_n) + \det(\mathbf{A}'_n) \tag{51}$$

Also ist $\quad \det(\mathbf{A}_n) + \det(\mathbf{A}'_n) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}_n) = -\det(\mathbf{A}'_n)$. □

4.3. Eindeutigkeit der Determinantenabbildung. Seien $\det : \mathrm{M}(n\times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\det' : \mathrm{M}(n\times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ zwei Abbildungen mit den Eigenschaften E1, E2 und E3. Wir zeigen, dass dann für jede beliebige Matrix $\mathbf{A}_n$ gilt:

$$\det(\mathbf{A}_n) = \det'(\mathbf{A}_n) \tag{52}$$

Falls $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) < n$ ist die Behauptung tivial zu beweisen, denn $\det(\mathbf{A}_n) = \det'(\mathbf{A}_n) = 0$.

Sei also $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) = n$. Wir formen $\mathbf{A}_n$ mithilfe von (17) so um, dass lediglich die Elemente der Hauptdiagonale von 0 verschieden sind (siehe auch Matrixinversion):

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} \tag{53}$$

Weil (17) die Determinante nicht verändert gilt (unter Benutzung der Zeilenlinearität):

$$\det(\mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{B}_n) \overset{\mathrm{E1}}{=} b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{n,n} \cdot \det(\mathbf{E}_n) \tag{54}$$

Wegen $\det(\mathbf{E}_n) = \det'(\mathbf{E}_n) \overset{\mathrm{E3}}{=} 1$ folgt:

$$b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{n,n} \cdot \det(\mathbf{E}_n) = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{n,n} \cdot \det'(\mathbf{E}_n) = \det'(\mathbf{B}_n) = \det'(\mathbf{A}_n) \tag{55}$$

□

4.4. **Existenz der Determinante, Spaltenentwicklung.** Wir beweisen die Existenz der Determinantenabbildung durch Angabe einer rekursiv definierten Abbildung $\varphi : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, die den Bedingungen E1, E2 und E3 genügt. Diese lautet:

$$\varphi(\mathbf{A}_1) = a_{11} \tag{56}$$

$$\varphi(\mathbf{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{ij}) \tag{57}$$

wobei M_{ij} wie in 2.2 definiert sei.

Wir führen Induktion über n. Für $n = 1$ erfüllt $\varphi(\mathbf{A}_1) = a_{11}$ offensichtlich die Bedingungen E1, E2 und E3:

$$\text{E1:} \quad \varphi((a_{11} + a'_{11})) = a_{11} + a'_{11} = \varphi(\mathbf{A}_1) + \varphi(\mathbf{A}'_1) \tag{58}$$

$$\text{E2:} \quad \mathrm{rg}(\mathbf{A}_1) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_1 = (0) \Rightarrow \varphi(\mathbf{A}_1) = 0 \tag{59}$$

$$\text{E3:} \quad \varphi(\mathbf{E}_1) = \varphi((1)) = 1 \tag{60}$$

Angenommen, $\varphi(\mathbf{A}_{n-1})$ erfülle E1, E2 und E3. Wir zeigen, dass unter dieser Voraussetzung auch $\varphi(\mathbf{A}_n)$ den Bedingungen E1, E2 und E3 genügt.

E1 (Zeilenlinearität): Es sei

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} + b_{k1} & \cdots & a_{kj} + b_{kj} & \cdots & a_{kn} + b_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Wir zeigen zunächst:

$$\varphi(\mathbf{C}_n) = \varphi(\mathbf{A}_n) + \varphi(\mathbf{B}_n) \tag{63}$$

$$\varphi(\mathbf{C}_n) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{C,ij}) + (-1)^{k+j} \cdot (a_{kj} + b_{kj}) \cdot \varphi(\mathrm{M}_{C,kj}) \tag{64}$$

Für $i \neq k$ enthält $\mathrm{M}_{C,ij}$ für (62) die „Summenzeile“:

$$\Rightarrow \mathrm{M}_{C,kj} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{k,j-1}+b_{k,j-1} & a_{k,j+1}+b_{k,j+1} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{65}$$

Nun ist aber $\mathrm{M}_{C,ij}$ eine $(n-1)\times(n-1)$-Matrix. Da $\varphi(\mathbf{A}_{n-1})$ nach Vorraussetzung linear in jeder Zeile (und natürlich insbesondere in der „Summenzeile“) ist, folgt

$$\varphi(\mathrm{M}_{C,kj}) \overset{\text{n. V.}}{=} \varphi\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,j-1} & a_{k,j+1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{k,j-1} & b_{k,j+1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hieran liest man für $i \neq k$ sofort ab:

$$\varphi(\mathrm{M}_{C,ij}) = \varphi(\mathrm{M}_{A,ij}) + \varphi(\mathrm{M}_{B,ij}) \tag{66}$$

Daher gilt für die Terme unter dem Summenzeichen in (64)

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{C,ij}) = \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{A,ij}) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{B,ij}) \tag{67}$$

Im Falle $i = k$ hängt $\mathrm{M}_{C,ij}$ von (62) gar nicht von der „Summenzeile“ ab (denn diese wird ja gerade gestrichen):

$$\Rightarrow \mathrm{M}_{C,kj} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{68}$$

Die Matrizen $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$ und $\mathbf{C}_n$ unterscheiden sich aber nur in der (jetzt gestrichenen) Summenzeile, somit gilt für $i = k$:

$$\varphi(\mathrm{M}_{C,ij}) = \varphi(\mathrm{M}_{A,ij}) = \varphi(\mathrm{M}_{B,ij}) \tag{69}$$

und es folgt für den freien Term in (64):

$$(-1)^{k+j}\cdot(a_{kj}+b_{kj})\cdot\varphi(\mathrm{M}_{C,kj}) = (-1)^{k+j}\cdot a_{kj}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{A,kj}) + (-1)^{k+j}\cdot b_{kj}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{B,kj}) \tag{70}$$

Kombinieren wir nun (67) und (70), so folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{C}_n) = &\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{A,ij}) + (-1)^{k+j}\cdot a_{kj}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{A,kj}) \\ &+ \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{B,ij}) + (-1)^{k+j}\cdot b_{kj}\cdot\varphi(\mathrm{M}_{B,kj}) \\ =&\varphi(\mathbf{A}_n) + \varphi(\mathbf{B}_n) \end{aligned} \tag{71}$$

Es sei nun

$$\mathbf{A}_n^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{k1} & \cdots & \lambda \cdot a_{kj} & \cdots & \lambda \cdot a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{72}$$

Wir zeigen:

$$\varphi(\mathbf{A}_n^*) = \lambda \cdot \varphi(\mathbf{A}_n) \tag{73}$$

$$\varphi(\mathbf{A}_n^*) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{A^*,ij}) + (-1)^{k+j} \cdot \lambda \cdot a_{kj} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{A^*,kj}) \tag{74}$$

Abermals unterscheiden wir die Fälle $i \neq k$ bzw. $i = k$. Im ersten Fall enthält $\mathrm{M}_{A^*,ij}$ die mit λ multiplizierte Zeile. Wiederum folgt aus der vorausgesetzten Zeilenlinearität von $\varphi(\mathbf{A}_{n-1})$, dass $\varphi(\mathrm{M}_{A^*,ij}) = \lambda \cdot \varphi(\mathrm{M}_{A,ij})$ gilt. Für $i = k$ jedoch enthält $\mathrm{M}_{A^*,kj}$ keine mit λ multiplizierte Zeile, sodass $\mathrm{M}_{A^*,kj} = \mathrm{M}_{A,kj}$ folgt, somit:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A}_n^*) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \lambda \cdot a_{ij} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{A,ij}) + (-1)^{k+j} \cdot \lambda \cdot a_{kj} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{A,kj}) \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{A,ij}) = \lambda \cdot \varphi(\mathbf{A}_n) \end{aligned} \tag{75}$$

E2:

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) < n \Rightarrow \varphi(\mathbf{A}_n) = 0 \tag{76}$$

Sei $\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} + \lambda \cdot a_{i1} & \cdots & a_{kn} + \lambda \cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Wir zeigen zunächst, dass $\varphi(\mathbf{A}_n) = \varphi(\mathbf{C}_n)$ gilt, Zeilenumformungen nach (17) also keinen Einfluss auf φ haben. Aus der bereits bewiesenen Linearität folgt:

$$\varphi(\mathbf{C}_n) = \varphi(\mathbf{A}_n) + \lambda \cdot \varphi(\mathbf{B}_n) \tag{77}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\varphi(\mathbf{B}_n) = 0$, falls $\mathbf{B}_n$ zwei gleiche Zeilen enthält.
Seien die r-te und die s-te Zeile gleich.

$$\varphi(\mathbf{B}_n) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{B,ij}) + (-1)^{r+j} \cdot a_{rj} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{B,rj}) + (-1)^{s+j} \cdot a_{sj} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{B,sj}) \tag{78}$$

Falls $i \neq r$ und $i \neq s$, dann enthält $\mathrm{M}_{B,ij}$ zwei gleiche Zeilen, da jedoch voraussetzungsgemäß $\varphi(\mathbf{A}_{n-1})$ E2 erfüllt folgt (da $\mathrm{rg}(\mathrm{M}_{ij}) < n-1$) $\varphi(\mathrm{M}_{ij}) = 0$. Im Falle $i = s$ verschieben wir (durch mehrmaliges Zeilenvertauschen) die s-te Zeile so lange bis $\mathrm{M}_{sj} = \mathrm{M}_{rj}$ ist. Dies erfordert $r - s - 1$ Zeilenvertauschungen (wenn wir $r > s$ wählen). Nach Vorraussetzung erfüllt $\varphi(\mathbf{A}_{n-1})$ E1, E2 und E3, somit treten beim Verschieben $r - s - 1$ Vorzeichenwechsel auf. Zudem gilt $a_{rj} = a_{sj}$. Somit

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{B}_n) &= (-1)^{r+j} \cdot a_{rj} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{B,rj}) + (-1)^{s+j} \cdot a_{rj} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{B,rj}) \cdot (-1)^{r-s-1} \\ &= \left[(-1)^{r+j} + (-1)^{r+j-1}\right] \cdot a_{rj} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{B,rj}) = 0 \end{aligned} \tag{79}$$

Wir haben also nun gezeigt, dass elementare Zeilenumformungen nach (17) den Wert von φ nicht ändern. Dann können wir eine beliebige Matrix $\mathbf{A}_n$ mit $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) < n$ so umformen, dass eine Nullzeile entsteht. Dann folgt aber aus der bereits bewiesenen Zeilenlinearität $\varphi(\mathbf{A}_n) = 0$.

E3:

$$\varphi(\mathbf{E}_n) = 1 \tag{80}$$

$$\varphi(\mathbf{E}_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \delta_{ij} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{ij}) = (-1)^{j+j} \cdot \delta_{jj} \cdot \varphi(\mathrm{M}_{jj}) = \varphi(\mathbf{E}_{n-1}) \overset{\text{n.V.}}{=} 1 \tag{81}$$

Da $\varphi(\mathbf{A}_n)$ E1, E2 und E3 erfüllt ist $\varphi(\mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_n)$. □

4.5. **Spaltenlinearität, Determinante der transponierten Matrix.** *Fall 1* $(\mathbf{A}_n) = (\mathbf{E}_n)$ (E1).

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n^T \Rightarrow \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{E}_n^T) \tag{82}$$

Fall 2.1 $\mathbf{A}_n \neq \mathbf{E}_n \wedge \mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) < n$ (E2). Da Zeilenrang gleich Spaltenrang ist, folgt:

$$\det \mathbf{A}_n = \det(\mathbf{A}_n^T) = 0 \tag{83}$$

Fall 2.2 $\mathbf{A}_n \neq \mathbf{E}_n \wedge \mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) = n$ (E3). Sei

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{84}$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{85}$$

Wir zeigen die Linearität in den Spalten, also:

$$\det(\mathbf{C}_n) = \det(\mathbf{A}_n) + \det(\mathbf{B}_n) \tag{86}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot (a_{ij} + b_{ij}) \cdot \det(\mathrm{M}_{C,ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathrm{M}_{C,ij}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot b_{ij} \cdot \det(\mathrm{M}_{C,ij}) \end{aligned} \tag{87}$$

$\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$ und $\mathbf{C}_n$ sind bis auf die j-te Spalte gleich. Diese wird jedoch gerade gestrichen, sodass folgt: $\det(\mathrm{M}_{C,ij}) = \det(\mathrm{M}_{A,ij}) = \det(\mathrm{M}_{B,ij})$, also

$$\det(\mathbf{C}_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\mathrm{M}_{A,ij}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot b_{ij} \cdot \det(\mathrm{M}_{B,ij}) = \det(\mathbf{A}_n) + \det(\mathbf{B}_n) \tag{88}$$

Die Zeilenlinearität (E3) lässt sich also ebenso durch Spaltenlinearität der transponierten Matrix realisieren, somit gilt in jedem Fall:

$$\det(\mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_n^T) \tag{89}$$

□

4.6. **Konsequenzen der Determinante transponierter Matrizen.** Alle bisher bewiesenen Sätze, welche auf die Zeilen bezug nahmen, lassen sich wegen 4.5 unmittelbar auf Spalten übertragen:

(1) Spaltenvertauschung ändert das Vorzeichen der Determinante.
(2) Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen (jedoch nicht der selben) ändert die Determinante nicht.
(3) Man kann eine Determinante ebenso nach einer Spalte entwickeln. Zusammen mit der Zeilenentwicklung ist damit der Laplace'sche Entwicklungssatz bewiesen.

4.7. **Multiplikationstheorem.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ \mathbf{A}_n &\mapsto \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \det(\mathbf{A}_n \mathbf{B}_n) \end{aligned}$$

mit festem aber beliebigen $\mathbf{B}_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$ wobei $\det(\mathbf{B}_n) \neq 0$ vorausgesetzt sei. Es sei ferner

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad . \tag{90}$$

Wir zeigen $\varphi(\mathbf{D}_n) = \varphi(\mathbf{A}_n) + \varphi(\mathbf{C}_n)$.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{D}_n) &= \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \varphi(\mathbf{D}_n\mathbf{B}_n) \\ &= \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\ldots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{i1}+a'_{i1})b_{11}+\ldots+(a_{in}+a'_{in})b_{n1} & \cdots & (a_{i1}+a'_{i1})b_{1n}+\ldots+(a_{in}+a'_{in})b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+\ldots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\ldots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{i1}b_{11}+\ldots+a_{in}b_{ni}) & & (a_{i1}b_{1n}+\ldots+a_{in}b_{nn}) \\ + & \cdots & + \\ (a'_{i1}b_{11}+\ldots+a'_{in}b_{ni}) & & (a'_{i1}b_{1n}+\ldots+a'_{in}b_{nn}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+\ldots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} \\ &\overset{E1}{=} \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \left(\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\ldots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}b_{11}+\ldots+a_{in}b_{n1} & \cdots & a_{i1}b_{1n}+\ldots+a_{in}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+\ldots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\ldots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1}b_{11}+\ldots+a'_{in}b_{n1} & \cdots & a'_{i1}b_{1n}+\ldots+a'_{in}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+\ldots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} \right) \\ &= \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \det(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) + \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \det(\mathbf{C}_n\mathbf{B}_n) = \varphi(\mathbf{A}_n) + \varphi(\mathbf{C}_n) \end{aligned} \tag{91}$$

Somit ist φ zeilenlinear.

Sei nun $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) < n$, dann ist ebenso $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) < n$, da $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) \subset \mathrm{Bild}(\mathbf{A}_n)$. Also:

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n) < n \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) < n \Rightarrow \varphi(\mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \det(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) \overset{E2}{=} 0 \tag{92}$$

$\varphi(\mathbf{A}_n)$ erfüllt daher E2.

Schließlich prüfen wir noch nach, dass $\varphi(\mathbf{E}_n) = 1$ gilt.

$$\varphi(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \det(\mathbf{E}_n\mathbf{B}_n) = \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \det(\mathbf{B}_n) = 1 \tag{93}$$

Die Abbildung $\varphi(\mathbf{A}_n)$ erfüllt die Eigenschaften E1, E2 und E3. Also ist $\varphi(\mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_n)$. Dies bedeutet aber

$$\varphi(\mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{B}_n)^{-1} \cdot \det(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) = \det(\mathbf{A}_n) \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) = \det(\mathbf{A}_n) \cdot \det(\mathbf{B}_n) \quad . \tag{94}$$

Die Behauptung ist damit für $\det(\mathbf{B}_n) \neq 0$ bewiesen.

Wenn $\mathrm{rg}(\mathbf{B}_n) = n$, dann lässt sich $\mathbf{B}_n$ durch elementare Zeilenumformungen nach (17) und (19) in eine obere Dreiecksform bringen, wobei alle Elemente auf der Hauptdiagonalen offensichtlich von 0 verschieden sind. Dann folgt aber aus (24), dass $\det(\mathbf{B}_n) \neq 0$. Dies ist äquivalent zu $\det(\mathbf{B}_n) = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathbf{B}_n) \neq n \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathbf{B}_n) < n$. Also gilt:

$\dim(\mathrm{Kern}(\mathbf{B}_n)) > 0$. Aus $\mathrm{Kern}(\mathbf{B}_n) \subset \mathrm{Kern}(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n)$ folgt $\mathrm{rg}(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) < n$, somit $\det(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) \overset{E2}{=} 0$. Nun ist aber auch $\det(\mathbf{A}_n) \cdot \det(\mathbf{B}_n) = 0$, es gilt daher auch in diesem Fall:

$$\det(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) = \det(\mathbf{A}_n) \cdot \det(\mathbf{B}_n) \tag{95}$$

Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen. □

4.8. **Determinantenberechnung mittels Gauß-Verfahren.** Sei

$$\mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} \tag{96}$$

die aus $\mathbf{A}_n$ mittels elementarer Zeilenumformungen der Art (17) und (19) hervorgegangene Matrix. Die Operation (17) lässt eine Determinante unverändert, während (19) das Vorzeichen der Determinante umkehrt. Wurde (19) im Verlaufe des Gauß-Verfahrens nun r-mal angewandt, so gilt

$$\det(\mathbf{A}_n) = (-1)^r \cdot \det(\mathbf{B}_n) = (-1)^r \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{vmatrix} \quad . \tag{97}$$

Wir zeigen zunächst

$$\det(\mathbf{B}_n) = \prod_{i=1}^{n} b_{ii} \tag{98}$$

durch Induktion nach n. Sei $n = 1$, dann gilt

$$\det(\mathbf{B}_1) = |b_{11}| = b_{11} = \prod_{i=1}^{1} b_{ii} \quad . \tag{99}$$

Für $n = 1$ ist (98) offensichtlich richtig.

Zu zeigen:

$$\det(\mathbf{B}_n) = \prod_{i=1}^{n} b_{ii} \Rightarrow \det(\mathbf{B}_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} b_{ii} \tag{100}$$

$$\det(\mathbf{B}_{n+1}) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & b_{1,n+1} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} & b_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{nn} & b_{n,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \tag{101}$$

Entwicklung nach der untersten Zeile liefert:

$$\det(\mathbf{B}_n) = b_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{n+1+n+1} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{vmatrix} \tag{102}$$

$$\overset{\text{n.V.}}{=} b_{n+1,n+1} \cdot \left((-1)^2\right)^{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} b_{ii} = \prod_{i=1}^{n+1} b_{ii}$$

Durch Einsetzen von (98) in (97) folgt dann die Behauptung. □

4.9. **Leibniz-Regel.** Wir zeigen, dass die Leibniz-Regel die Eigenschaften E1, E2 und E3 besitzt.

E1:

$$\text{Sei } \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad .$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_n) &= \sum_{\mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot (a_{i,\tau(i)} + a'_{i,\tau(i)}) \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} \\ &= \sum_{\mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i,\tau(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} + \sum_{\mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{i,\tau(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} \\ &= \det(\mathbf{B}_n) + \det(\mathbf{C}_n) \end{aligned} \tag{103}$$

E2:

Wir betrachten die Menge der Permutationen $\mathcal{S}_n$. Dann können wir die Permutationen aus $\mathcal{S}_n$ jeweils in Paare τ und τ' aufteilen, die sich dadurch unterscheiden, dass das i-te und das j-te Bild vertauscht sind. Die Transposition, welche diese vertauscht sei σ_{ij}. Also

$$\tau' = \sigma_{ij} \circ \tau \quad . \tag{104}$$

Wir nutzen (ohne Beweis) aus, dass τ', falls τ willkürlich als gerade Permutation angesehen wird, stets eine ungerade Permutation ist, somit

$$\operatorname{sign}(\tau') = \operatorname{sign}(\sigma_{ij} \circ \tau) = -\operatorname{sign}(\tau) \quad . \tag{105}$$

Bezeichne noch $\mathcal{G}_n$ die Menge aller geraden Permutationen, so können wir dann schreiben:

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau\in\mathcal{G}_n} \Big[\operatorname{sign}(\tau) \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} + \operatorname{sign}(\sigma_{ij} \circ \tau) \cdot a_{1,\sigma_{ij}(1)\circ\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma_{ij}(n)\circ\tau(n)}\Big] \\ &= \sum_{\tau\in\mathcal{G}_n} \Big[\operatorname{sign}(\tau) \cdot \Big(a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} - a_{1,\sigma_{ij}(1)\circ\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma_{ij}(n)\circ\tau(n)}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{106}$$

Wegen $\tau(k) = \tau'(k)$ für $k \neq i,j$ bzw. wegen $\tau(i) = \tau'(j)$ und $\tau(j) = \tau'(i)$ folgt:

$$= \sum_{\tau\in\mathcal{G}_n} \left[\operatorname{sign}(\tau) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} a_{k,\tau(k)} \cdot \big(a_{i,\tau(i)} \cdot a_{j,\tau(j)} - a_{i,\tau(j)} \cdot a_{j,\tau(i)}\big)\right] \tag{107}$$

Angenommen, die i-te und die j-te Zeile seien gleich, dann ist $\operatorname{rg}(\mathbf{A}_n) < n$ und es gilt $a_{ik} = a_{jk}$ für beliebiges k. Es folgt dann schließlich:

$$= \sum_{\tau\in\mathcal{G}_n} \left[\operatorname{sign}(\tau) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} a_{k,\tau(k)} \cdot \big(a_{i,\tau(i)} \cdot a_{i,\tau(j)} - a_{i,\tau(i)} \cdot a_{i,\tau(j)}\big)\right] = 0 \tag{108}$$

E3:

$$\sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot \delta_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \delta_{n,\tau(n)} \tag{109}$$

Es gibt offensichtlich nur einen von 0 verschiedenen Summanden, nämlich wenn $k = \tau(k) \forall k$, also $\tau(k) = \operatorname{id}(k)$.

$$\operatorname{sign}(\operatorname{id}) \cdot \delta_{1,\operatorname{id}(1)} \cdot \ldots \cdot \delta_{n,\operatorname{id}(n)} = \delta_{1,1} \cdot \ldots \cdot \delta_{n,n} = 1 \tag{110}$$

Damit sind E1, E2 und E3 nachgewiesen und es gilt:

$$\det(\mathbf{A}_n) = \sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} \tag{111}$$

□