Kurvenschar: $f_t(x) = 1/12 \cdot x^4 - t^2/2 \cdot x^2 + x + 2$

Funktion und Ableitungen

$f_t(x) = 1/12 \cdot x^4 - t^2/2 \cdot x^2 + x + 2$ mit $t > 0$
$f_t'(x) = 1/3 \cdot x^3 - t^2 \cdot x + 1$
$f_t''(x) = x^2 - t^2$

1. Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von f_t.

$f_t''(x) = x^2 - t^2 = 0$
$x = \pm t$

$f_t(- t) = - 5/12 \cdot t^4 - t + 2$
$f_t(t) = - 5/12 \cdot t^4 + t + 2$

2. Zeigen Sie: Die Tangente an f_t im Schnittpunkt mit der y-Achse ist parallel zu der Geraden durch die Wendepunkte.

$m = ((- 5/12 \cdot t^4 + t + 2) - (- 5/12 \cdot t^4 - t + 2)) / ((t) - (- t)) = 1$

$f_t'(0) = 1$

3. Bestimmen sie die Ortskurve der Wendepunkte von f_t die links der y-Achse liegen.

$x = - t$
$t = - x$

$f_t(x) = 1/12 \cdot x^4 - (- x)^2/2 \cdot x^2 + x + 2 = - 5/12 \cdot x^4 + x + 2$

4. Eine Parabel 2. Grades berührt die Funktion f_1 im Punkt S(0 | 2) und schneidet im Punkt P(-3 | 5/4). Berechnen sie den Term der Parabel.

$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$p(0) = 2 \rightarrow c = 2$
$p'(0) = 1 \rightarrow b = 1$
$p(-3) = 5/4 \rightarrow 9 \cdot a - 3 \cdot b + c = 1.25$

Lösung des LGS ist: $a = 0.25 \wedge b = 1 \wedge c = 2$

$p(x) = 0.25 \cdot x^2 + x + 2$

5. Bestimmen Sie die Bereiche für die Funktion monoton steigend/fallend ist. Untersuchen sie die Funktion ebenfalls auf ihr Krümmungsverhalten.

Monotonie

$f_t'(x) = 1/3 \cdot x^3 - t^2 \cdot x + 1 > 0$

Das ist allgemein etwas schlecht zu zeigen, da wir eine Funktion 3. Grades haben.

$f_1'(x) = 1/3 \cdot x^3 - x + 1 > 0$
$x > - (12 - 4 \cdot \sqrt{5})^{(1/3)}/2 - (4 \cdot \sqrt{5} + 12)^{(1/3)}/2 = -2.103803402$

Krümmungsverhalten

$f_t''(x) = x^2 - t^2 > 0$
$x^2 > t^2$
$x < - t$ oder $x > t$