Übung zur Linearen Algebra bei Prof.Dr. Reinhard Knörr WS 08/09

Übungsgruppe[1] am Mittwoch 13:15 - 14:45 HG219 bei Karsten Evers

1 Aufgaben

Aufgabe 1. Seien $m,n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ und n Teiler von m (in Zeichen $n|m$). Finde einen injektiven Gruppenhomomorphismus $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (und weise nach, dass es einer ist).

Aufgabe 2. Sei $f : K \to R$ ein Ringhomomorphismus zwischen einem Körper K und Ring R (also $f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$). Dann ist f entweder injektiv, oder der Nullhomomorphismus (d.h. $f(K) = \{0_R\}$).

Aufgabe 3. Welche Mengen sind Vektorräume über dem jeweils gegebenen Körper?
(a) $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\} \subseteq \mathbb{R}^3$, über dem Körper $\mathbb{R}$
(b) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$
(c) $C := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\} \subseteq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ über dem Körper $\mathbb{R}$
(d) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y\} \subseteq \mathbb{R}^3$ über dem Körper $\mathbb{R}$

Aufgabe 4. Seien X,Y Mengen. Mit $Y^X := \{f \mid f : X \to Y\}$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von X nach Y, mit $\mathscr{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$ die Potenzmenge von X.
Zeige, dass es eine Bijektion zwischen $\mathscr{P}(X)$ und $\{0,1\}^X$ gibt.

Definition 1. Seien V,W zwei Vektorräume über demselben Körper K. Wir nennen eine Abbildung $f : V \to W$ K-linear, wenn $f(v+w) = f(v) + f(w)$ und $f(kv) = kf(v)$ für alle $v \in V$, $w \in W$, $k \in K$ erfüllt ist.

Aufgabe 5. (a) Sei X eine Menge. Wir betrachten $V := \mathscr{P}(X)$, mit Addition $+ : V \times V \to V$ definiert durch $A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ und skalarer Multiplikation $\cdot : K \times C \to C$ über $K := \{0,1\}$ definiert durch $0 \cdot A := \emptyset$ und $1 \cdot A := A$. Zeige, dass V ein Vektotrraum über K ist.
(b) Auf der Menge W aller Abbildungen von X in K (also $W := \{0,1\}^X$) deinieren wir auch eine Addition durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und skalarre Multiplikation durch $(k \cdot f)(x) := k \cdot f(x)$. Zeige, dass $\{0,1\}^X$ damit zu einem Vektorraum wird.
(c) Zeige, dass die Abbildung ϕ aus der Lösung zu Aufgabe 4 eine K-lineare Abbildung ist.

Zusatzaufgaben:

Aufgabe 6. Sei X eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung $f : X \to \mathscr{P}(X)$ gibt. (Hinweis: Führe die Annahme, dass es doch eine surjektive Abbildung $f : X \to \mathscr{P}(X)$ mit Hilfe der Menge $Y := \{x \in X \mid x \in f(x)\} \in \mathscr{P}(X)$ zum Widerspruch.)

Aufgabe 7. Gib Bijektionen an, zwischen (a) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$, (b) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$, (c) $\mathbb{R}$ und $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

[1] Dieses pdf findet ihr hier: http://www.math.uni-rostock.de/∼evers/

2 Lösungsvorschläge

Die Lösungsvorschläge[2] dienen zur Kontrolle! Das Nachlesen der Lösung macht nur Sinn, wenn ihr euch vorher intensiv mit der Aufgabe auseinandergesetzt habt. Ansonsten gilt wie immer: Falls ihr etwas nicht versteht, einfach nachfragen!

Lösung 1. Wir definieren $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ durch $f([x]) := [\frac{mx}{n}]$.

Es folgt $f([x]+[y]) = f([x+y]) = [\frac{m(x+y)}{n}] = [\frac{mx}{n} + \frac{my}{n}] = [\frac{mx}{n}] + [\frac{my}{n}] = f([x]) + f([y])$.

Ist $f([x]) = f([y])$, also $[\frac{mx}{n}] = [\frac{my}{n}]$, so folgt, dass m Teiler von $\frac{mx}{n} - \frac{my}{n} = \frac{m(x-y)}{n}$ ist. Es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{m(x-y)}{n} = km$. Division durch m und Multiplikation mit n ergibt $x - y = kn$, also ist n ein Teiler von $x-y$ und somit $[x] = [y]$. Die Abbildung ist also injektiv.

Lösung 2. Falls f nicht injektiv ist, gibt es $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Mit $z := x - y \neq 0$ folgt $f(z) = f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$. Für $a \in K$ gilt demnach $f(a) = f(az^{-1}z) = f(az^{-1})f(z) = f(az^{-1})0 = 0$, also $f(K) = \{0\}$.

Lösung 3. Nur A, C und B für $a = 0$, sind Vektorräume.

Lösung 4. Für $A \subseteq X$ definieren wir $\chi_A : X \to \{0,1\}$ durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A \\ 1 & \text{falls } x \in A \end{cases}$$

Damit bekommen wir eine Abbildung $\phi : \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}^X$ durch $\phi(A) := \chi_A$. Offensichtlich ist ϕ damit eine Bijektion (denn $\psi : \{0,1\}^X \to \mathscr{P}(X)$ definiert durch $\psi(f) := f^{-1}(A)$ ist die Umkehrabbildung).

Lösung 5. (a) Das $(V,+)$ eine kommutative Gruppe ist, ist Bestandteil der Hausaufgabe (Bemerkung: Das umständlich zu beweisende Assoziativgesetz ergibt sich ganz leicht aus (c). Wer sieht's?). Zu zeigen bleibt noch, dass für alle $x, y \in K$ und $A, B \in V$ die folgenden Gleichungen erfüllt sein müssen. (I) $(x+y) \cdot A = (x \cdot A) + (y \cdot A)$, (II) $x \cdot (A+B) = (x \cdot A) + (x \cdot B)$, (III) $x \cdot (y \cdot A) = (x \cdot y) \cdot A$ und (IV) $1 \cdot A = A$. Da es für x und y nur die Möglickeit 0 oder 1 gibt und $A + A = \emptyset$ für alle $A \in V$ gilt, ist das Nachprüfen schnell gemacht.

(b) Folgt unmittelbar aus der Definition der Verknüpfungen (ausführlicher in der Übung).

(c) Zu zeigen ist $\phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$ und $\phi(k \cdot A) = k \cdot \phi(A)$, $\forall A, B \in V$, $k \in K$.

$\phi(A+B) = \chi_{A+B}$ und $\phi(A) + \phi(B) = (\chi_A + \chi_B)$ sind beides Abbildungen $X \to \{0,1\}$. Zeigen wir, das sie gleich sind. Sei dazu $x \in X$. Es gilt

$$\chi_{A+B}(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A+B \\ 1 & \text{falls } x \in A+B \end{cases}, \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A \\ 1 & \text{falls } x \in A \end{cases}, \quad \chi_B(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin B \\ 1 & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

Man sieht nun schön (zwei Fälle), dass $\chi_{A+B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) = (\chi_A + \chi_B)(x)$ gilt.

Ebenso sind $\phi(k \cdot A) = \chi_{k \cdot A}$ und $k \cdot \phi(A) = k \cdot \chi_A$ zwei Abbildungen, deren Gleicheit sich für $k = 0$ und $k = 1$ allerdings sofort ergibt.

[2]Ich bin für jede Fehlermeldung dankbar! Entweder direkt, oder per email an karsten.evers@uni-rostock.de

Lösung 6. Annahme $f : X \to \mathscr{P}(X)$ ist surjektiv. Setze $Y := \{x \in X \mid x \in f(x)\}$. Dann ist $Y \subseteq X$, also $Y \in \mathscr{P}(X)$. Es gibt somit ein $z \in X$ mit $f(z) = Y$. Es muss nun einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

1.Fall $z \in f(z)$. Dann $z \in Y$. Nach Definition von Y folgt aber $z \notin f(z)$ - Widerspruch!

2.Fall $z \notin f(z)$, also $z \notin Y$. Nach Definition von Y nun aber $z \in f(z)$ - Widerspruch!

Beide Fälle, obwohl einer eintreten müsste, führen zum Widerspruch. f kann daher nicht surjektiv sein.

Lösung 7. (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(n) = -k$, falls $n = 2k$ und $f(n) = k$, falls $n = 2k-1$ ist bijektiv.

(b) Offenbar ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, definiert durch $f(n) := n$, injektiv. Ebenso ist $g : \mathbb{Q} = \{\frac{\varepsilon p}{q} \mid \varepsilon \in \{-1,1\},\ p,q \in \mathbb{N},\ 0 \neq q,\ ggt\,(p,q) = 1\} \to \mathbb{Z}$, definiert durch $g(\frac{\varepsilon p}{q}) := \varepsilon 2^p 3^q$, injektiv. Die Behauptung folgt nun aus (a) und dem Satz von Schröder-Bernstein.

(c) Offenbar sind $\beta : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{Q})$ definiert durch $\beta(f) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{10^k}$ bzw. $\gamma(x) := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq x\}$ injektive Abbildungen. Die Behauptung folgt nun aus (b), Aufgabe 4 und dem Satz von Schröder-Bernstein.