6. Übungsblatt zu der Vorlesung

"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 16.11.2015

*Abgabetermin:* 23.11.2015, 10:00 – vor der Vorlesung

21.) Geben Sie – mit Begründung – Matrizen $A_1, A_2, A_3, A_4$ mit reellen Koeffizienten an, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

22.) Für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt die Matrix $\lambda \cdot I_n$ eine n-reihige *skalare* Matrix. Beweisen Sie:

i) Sind $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, wobei **A eine skalare Matrix** ist, so ist $A \cdot B = B \cdot A$.

ii) Ist $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ **keine skalare Matrix**, so gibt es eine Matrix $B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(6 Punkte)

23i) Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrizen $A^2$ und $A^3$. Welche Eigenschaft hat die Matrix $A$ ?

ii) Geben Sie – mit Begründung – eine Matrix $B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ an, die weder invertierbar, noch nilpotent ist.

iii) Beweisen Sie: Ist $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ nilpotent, so ist $I_n - M$ invertierbar.

*Hinweis zu iii)*: Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(I_n - M) \cdot (I_n + M + M^2 + ... + M^m) = I_n - M^{m+1}.$$

(6 Punkte)

24.) Für die folgenden 4 linearen Abbildungen $f_1, f_2, f_3, f_4$ sind diejenigen Matrizen $A_1, A_2, A_3, A_4$ anzugeben, für die jeweils gilt: $f_i(v) = A_i \cdot v$ für $1 \leq i \leq 4$ und alle Vektoren $v$ des jeweiligen Definitionsbereiches. – Alle auftretenden Vektoren sind Spaltenvektoren, die aus Platzgründen als transponierte Zeilenvektoren geschrieben werden:

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \; f_1((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1, x_2)^T$ ;

ii) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \; f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)^T$ ;

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \; f_3((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_1 + x_2, x_2)^T$ ;

iv) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \; f_4((x_1, x_2)^T) = (\cos(\alpha) \cdot x_1 - \sin(\alpha) \cdot x_2, \sin(\alpha) \cdot x_1 + \cos(\alpha) \cdot x_2)^T$,

wobei $\alpha$ ein fixierter Winkel ist.

(4 Punkte)