Aufgabe 1

Sei A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie: Es gibt eine Menge B und eine Funktion $f : A \to B$, so dass $\forall a, b \in A : a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

Beweis. Wir wählen $B = A/{\sim}$ und f als $f : A \to A/{\sim}; x \mapsto [x]_\sim$ mit $A/{\sim} := \{[x]_\sim : x \in A\}$.

Per Definition gilt $[x]_\sim := y \in A : x \sim y$. Es ist also $a \sim b$ genau dann, wenn $[a]_\sim = [b]_\sim$. Mit f muss also auch gelten $a \sim b \Leftrightarrow [a]_\sim = [b]_\sim \Leftrightarrow f(a) = f(b)$, was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 2

Nach Satz 6 hat jede Funktion $f : A \to B$ eine Zerlegung $f = h \circ g$, bei der g surjektiv und h injektiv ist. Kann man auch für jedes f eine Zerlegung $f = h \circ g$ finden, bei der g injektiv und h surjektiv ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Beweis. Gegenbeispiel.

Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 2$. Laut Angabe müsste eine Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ existieren, die surjektiv ist, wobei X beliebig sei. Da aber nicht gefordert wurde, dass f surjektiv ist, gilt insbesondere, dass auch h nicht surjektiv sein muss. Das ist ein Widerspruch, die Behauptung ist damit widerlegt. $\square$