Grundlagen der Analysis 2 – SoSe 2018
Jonas Sauer, Stephanie Thomas
3. Mai 2018

Übungsblatt 4

Abgabe: 15. Mai 2018, 09:15 Uhr

Aufgabe 1: Der Mittelwertsatz (6 Punkte)

Wir kennen den Mittelwertsatz in einer Variablen:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es eine Stelle $c \in (a, b)$ so, dass $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Gilt dieser Satz für Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$? Falls ja, geben Sie einen Beweis an, falls nein, ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2: Beweis des Schrankensatzes: (6 Punkte)

Beweisen Sie den Schrankensatz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiterhin existiere ein $L \geq 0$ so, dass für alle $x \in U$ gilt: $\|\mathrm{grad}\ f(x)\|_2 \leq L$. Dann ist f Lipschitz-stetig mit $|f(b) - f(a)| \leq L\,\|b - a\|_2$ für alle $a, b \in U$.

Aufgabe 3: Homogene Funktionen (8=3+5 Punkte)

a) Geben Sie je eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ an, welche homogen vom Grad $0, 1$ beziehungsweise 2 ist.
b) Sei jetzt $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt: $(\mathrm{grad} f(x), x) = \alpha f(x)$.

Aufgabe 4: Ableitungen höherer Ordnung (13 = 6+4+3 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Funktion f definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ eine C^1-Funktion, also stetig partiell differenzierbar ist.
b) Geben Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\partial_y \partial_x f(x, y)$ und $\partial_x \partial_y f(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ an und begründen Sie, dass diese dort stetig sind. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem Vertauschungssatz von Schwarz.
c) Geben Sie nun $\partial_x \partial_y f(0, 0)$ und $\partial_y \partial_x f(0, 0)$ an. Sind $\partial_x \partial_y f(x, y)$ und $\partial_y \partial_x f(x, y)$ auch in $(0, 0)$ stetig?

Aufgabe 5: Eine Hessematrix (7 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$ sei auf $\mathbb{R}^n$ eine symmetrische Bilinearform $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$b(x, y) := \sum_{i,j=1,\ldots,n} b_{ij} x_i y_j = x^T B y \quad \text{für } B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots n} \in R^{n \times n}.$$

Zeigen Sie, dass $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q(x) := b(x, x)$ zwei mal stetig differenzierbar ist und geben Sie für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Hessematrix $H_q(x_0)$ an.

Präsenzaufgabe 6: Minitest

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Sie sollten für den Test höchstens fünf Minuten brauchen.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung

a) Wenn f differenzierbar ist, ist f stetig.
b) Wenn alle partiellen Ableitungen von f existieren, ist f differenzierbar.
c) Wenn f differenzierbar ist, dann existieren alle partiellen Ableitungen von f.
d) Wenn alle partiellen Ableitungen existieren und in einem Punkt $x \in U$ stetig sind, ist f in x differenzierbar.
e) Wenn f differenzierbar ist, sind alle partiellen Ableitungen von f stetig.

Präsenzaufgabe 7:

Es seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 2t+1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{sowie} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$$

gegeben und $t \in \mathbb{R}$, sowie $x, y \in \mathbb{R}^2$ fest. Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob der Ausdruck Sinn ergibt, und welche Art von Objekt er bezeichnet, das heißt, ob es sich um eine reelle Zahl, eine Spalte oder Zeile in $\mathbb{R}^2$ oder ähnliches handelt. Falls der Ausdruck Sinn ergibt, berechnen Sie das Objekt.

a) $f(t)$	b) $g(x)$	c) $f(x)$	d) $g(t)$
e) $g(f(t))$	f) $f(g(x))$	g) $Dg(x)$	h) $Dg(t)$
i) $Df(t)$	j) $Dg(x) \cdot y$	k) $D(f+g)(x)$	l) $D(f \circ g)(x)$
m) $D(g \circ f)(t)$	n) $D(f \circ g)(x) \cdot y$	o) $D(f \circ g)(y) \cdot x$	p) $t \cdot D(f \circ g)(x)$
q) $Df(g(x)) \cdot Dg(x)$	r) $Df(g(t)) \cdot Dg(t)$	s) $Dg(f(t)) \cdot Df(t)$	

Viel Erfolg!