Lösung zu Blatt 3 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

27. Mai 2011

1. (5 Punkte)
   Beweisen Sie Proposition 1.37.(a) aus dem Vorlesungsskript, also:
   Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen eindeutigen Grenzwert besitzt. Das heißt, falls für $a, b \in X$ gilt $\lim_{k\to\infty} x^k = a$ und $\lim_{k\to\infty} x^k = b$, dann folgt $a = b$.

   Lösung :

   Es gelte für $a, b \in X$ $\lim_{k\to\infty} x^k = a$ und $\lim_{k\to\infty} x^k = b$.
   Das heißt
   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{so, dass} \quad d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{falls} \quad n \geq N$$
   und
   $$\exists\, M \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{falls} \quad n \geq M$$
   Somit haben wir
   $$0 \leq d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) = d(x_n, a) + d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   für $n \geq \max\{N, M\}$. Also ist $d(a, b)$ kleiner als jedes ε und somit gleich 0.

2. (5 Punkte) In jedem der folgenden Fälle (a) – (c) ist ein metrischer Raum X und $A \subseteq X$ gegeben. Geben Sie in jedem der Fälle folgendes für die Menge A an: (i) das Innere von A, (ii) den Abschluss von A, (iii) den Rand von A, (iv) die Menge der Häufungspunkte von A, (v) die Menge der isolierten Punkte von A.

Lösung :

(a) Es sei $X = \mathbb{R}$ mit der vom Absolutbetrag induzierten Metrik und

$$A = \{-3\} \cup]-1, 1] \cup \{2 + k^{-1}, k \in \mathbb{N}\}$$

(i) $A^\circ =]-1, 1[$.
(ii) $\overline{A} = \{-3\} \cup [-1, 1] \cup \{2\} \cup \{2 + k^{-1} : k \in \mathbb{N}\}$.
(iii) $\partial A = \{-3\} \cup \{-1\} \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \{2 + k^{-1} : k \in \mathbb{N}\}$.
(iv) $H(A) = [-1, 1] \cup \{2\}$.
(v) $I(A) = \{-3\} \cup \{2 + k^{-1} : k \in \mathbb{N}\}$.

(b) Es sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der durch die euklidische Norm gegebenen Metrik (Blatt 2, Aufgabe 4) und

$$A = B_3(5, 5) \cup \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

(i) $A^\circ = B_3((5, 5))$.
(ii) $\overline{A} = \overline{B}_3((5, 5)) \cup \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.
(iii) $\partial A = S_3((5, 5)) \cup \{(t, t) : t \in \mathbb{R} \backslash]5 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 5 + \frac{3}{\sqrt{2}}[\}$.
(iv) $H(A) = \overline{B}_3((5, 5)) \cup \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.
(v) $I(A) = \emptyset$.

(c) Es sei X gleich der Menge der beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der durch die Supremumsnorm erzeugten Metrik, also $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \|f\|_{\sup} < \infty\}$ und

$$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f = \text{const}\}$$

also die Menge der konstanten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
(i) $A^\circ = \emptyset$.
(ii) $\overline{A} = A$.
(iii) $\partial A = A$.
(iv) $H(A) = A$.
(v) $I(A) = \emptyset$.

3. (5 Punkte) Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit der von der Maximumsnorm ($\|(x_1, x_2)\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$) induzierten Metrik, sowie die Teilmengen $A :=]1, 6[\times] - 5, 1]$, $B := \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{N}\}$. Offenbar ist eine der beiden Mengen beschränkt und die andere unbeschränkt. Geben Sie für die beschränkte Menge ein $y \in \mathbb{R}^2$ und $r_0 > 0$ so an, dass die Menge in $B_{r_0}(y)$ enthalten ist. Geben Sie für die unbeschränkte Menge zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ und jedem $r > 0$ ein Element der unbeschränkten Menge an, das nicht in $B_r(x)$ liegt. Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung :

Die Menge A ist beschränkt. Für $(x_1, x_2) \in A$ ist $|x_1| < 6$ und $|x_2| < 5$, also $\|(x_1, x_2)\|_{\max} < 6$. Also kann man zum Beispiel einfach $r_0 = 6$ und $y = (0, 0)$ wählen, damit ist klarerweise $A \subseteq B_{r_0}(y)$, da es sich ja um die Kugel in der Maximumsnorm handelt.

Die Menge B ist unbeschränkt. Seien $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ gegeben. Dann gilt also

$$\begin{aligned} B_r(x) &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|_{\max} < r\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - y_1| < r \text{ und } |x_2 - y_2| < r\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn man sich nun eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ so wählt, dass $n > |x_1| + r$, so ist $a := (n, 1) \in B$, jedoch wegen $|x_1 - n| = n - x_1 \geq n - |x_1| > r$, ist $(n, 1) \notin B_r(x)$, wie verlangt.

4. (5 Punkte) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}\ ;\ n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für} \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & \text{für} \quad x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\\ 0 & \text{für} \quad x \in [\frac{2}{n}, 2] \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktion $f_n(x)$ für ein beliebiges $n > 1$. Untersuchen Sie f_n auf gleichmäßige Konvergenz, das heißt, betrachten Sie die Supremumsnorm und untersuchen Sie, ob f_n in dieser Norm konvergiert. Geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an. Beweisen Sie in jedem Fall Ihre Antwort.

Lösung:

Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion. Das sieht man wie folgt: Für $x = 0$ ist $f_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, also insbesondere $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Sei nun $x > 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x \geq \frac{2}{N}$. Für jedes $n > N$ ist natürlich auch $x \geq \frac{2}{n}$. Nach Definition der Funktion ist jedoch $f_n(x) = 0$ für $x \geq \frac{2}{n}$. Somit haben wir für jedes $x \in [0, 2]$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $f_n(x) = 0 \ \forall n > N$, was zeigt, dass $f_n(x) \to 0$ für alle $x \in [0, 2]$. Einziger möglicher Kandidat wäre also die Nullfunktion. Da aber

$$\|f_n - 0\|_{\text{sup}} = \|f_n\|_{\text{sup}} = 1 \ \forall n$$

konvergiert f_n nicht gleichmäßig.