Version 4
18.4.2004

Separierbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Form: $\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$

Lösung wegen $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ durch „**Trennung der Variablen**": $\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx}$

Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen

Betrachtete Form: $\boxed{y' = f(ax + by + c)}$ mit $b \neq 0$

Lösungsweg: **Substitution** $u = ax + by + c$, also $y' = f(u)$.

$$u' = \frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = 1 \cdot (a + b \cdot f(u)).$$

Trennung der Variablen ergibt Lösung u(x) dieser DGL. **Rücksubstitution** führt zu y(x).

Lineare Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung $y(x)$ einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung besteht aus

1. der allgemeinen Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung
2. irgendeiner partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Form: $\boxed{y' + f(x) \cdot y = 0}$:

Allgemeine Lösung: $\boxed{y(x) = C \cdot e^{-F(x)}}$ mit einer Stammfunktion $\boxed{F(x) = \int f(x)\, dx}$ und $C \in R$.

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Form: $\boxed{y' + f(x) \cdot y = g(x)}$:

Lösung mittels „**Variation der Konstanten**", sofern $y_p(x)$ nicht einfacher zu ermitteln ist:

$\boxed{y(x) = c(x) \cdot e^{-F(x)}}$ mit $\boxed{c(x) = \int g(x) \cdot e^{+F(x)} dx}$ mit einer Stammfunktion $\boxed{F(x) = \int f(x)\, dx}$.

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form: $\boxed{y' + a_o y = g(x)}$ mit a_0 = const.

Lösung über $\boxed{y_h(x) = C \cdot e^{-a_o x}}$ und einen Ansatz für $y_p(x)$ aus folgender Tabelle:

g(x)	**Fall**	**Ansatz für $y_p(x)$**
$b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$		$c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$
$b \cdot e^{\alpha x}$	$\alpha \neq -a_o$	$c \cdot e^{\alpha x}$
	$\alpha = -a_o$	$c \cdot x \cdot e^{\alpha x}$
$b_1 \cdot \sin(\beta x) + b_2 \cdot \cos(\beta x)$		$c_1 \cdot \sin(\beta x) + c_2 \cdot \cos(\beta x)$

Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form: $\boxed{y'' + a_1 y' + a_o y = g(x)}$ mit a_1, a_0 = const.

1. Berechnung von $y_h(x)$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$ mit $\boxed{\underline{\lambda} = \sigma + j\omega}$ führt auf die **charakteristische Gleichung**

$\boxed{\underline{\lambda}^2 + a_1 \underline{\lambda} + a_o = 0}$

mit den **Lösungen** $\boxed{\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_o}}$.

Damit Entscheidung für einen Typ von **Ansatzfunktion**, deren konkrete Parameter $(\lambda, \sigma, \omega)$ sich aus den Lösungen der charakteristischen Gleichung ergeben.
C_1, C_2 sind Integrationskonstante.

Fall	Nullstellen	Ansatzfunktion für $y_h(x)$
$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_o > 0$	zwei reelle λ_1, λ_2	$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_o = 0$	eine doppelte reelle $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_h(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$
$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_o < 0$	zwei konjugiert komplexe $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2 = \sigma \pm j\omega$	$y_h(x) = e^{\sigma x}[C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)]$ mit $\sigma = -a_1/2$ und $\omega = \sqrt{-(a_1/2)^2 + a_0} > 0$

2. Berechnung von $y_p(x)$

Der Typ der Ansatzfunktion ist identisch mit dem Typ der Störfunktion g(x).

g(x)	Fall	Ansatzfunktion für $y_p(x)$
$b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$	$a_o \neq 0$	$c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$
	$a_o = 0, \quad a_1 \neq 0$	$x \cdot (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n)$
	$a_o = 0, \quad a_1 = 0$	$x^2 \cdot (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n)$
$b \cdot e^{\alpha x}$	$\alpha \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$	$c \cdot e^{\alpha x}$
	$\alpha \in \{\lambda_1, \lambda_2\}, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$c \cdot x \cdot e^{\alpha x}$
	$\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$	$c \cdot x^2 \cdot e^{\alpha x}$
$b_1 \cdot \sin(\beta x) + b_2 \cdot \cos(\beta x)$	$j\beta \notin \{\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2\}$	$c_1 \cdot \sin(\beta x) + c_2 \cdot \cos(\beta x)$
	$j\beta \in \{\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2\}$	$x \cdot (c_1 \cdot \sin(\beta x) + c_2 \cdot \cos(\beta x))$

Ist g(x) eine Summe/ein Produkt in der Tabelle enthaltener Funktionen, so ist als Ansatzfunktion ebenfalls eine Summe/ein Produkt solcher Funktionen anzusetzen.
Alle in der Ansatzfunktion enthaltenen unbekannten Koeffizienten c_i müssen sich durch Einsetzen der Ansatzfunktion in die inhomogene Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich bestimmen lassen. Anderenfalls ist die Rechnung fehlerhaft.