Induktionsanfang ist klar:

Induktionsschritt:

Wir nehmen an, es gelte:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n+k)(n-k)=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Oder anders geschrieben

$$\sum_{k=0}^{n-1}n^2-k^2=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Genau gesagt, ist das eine ganz normale Induktion über eine Variable n. Das Bescheidene daran aber ist, dass das n auch in der Summe auftaucht.

Wir ersetzen also zunächst alle n in der linken Seite der Gleichung durch n+1 und formen dann um:

$$\sum_{k=0}^{n}(n+1+k)(n+1-k)=\sum_{k=0}^{n}(n+1)^2-k^2=\sum_{k=0}^{n}n^2+2n+1-k^2$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2+2n+1)=(\sum_{k=0}^{n}n^2-k^2)+(n+1)(2n+1)=\sum_{k=0}^{n-1}n^2-k^2+(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}+(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{(n+1)}{6}\left[n(4n-1)+6(2n+1)\right]=\frac{(n+1)}{6}\left[4n^2-n+12n+6\right]=\frac{(n+1)}{6}\left[4n^2+11n+6\right]$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(4(n+1)-1)}{6}$$

Woodoo