Lineare Algebra, Übung 8

1) Es sei $(a_{ij}) \in M(d \times d, K)$, $a_{ij} \in K$, $i, j \in [1, d]$ eine quadratische Matrix, so dass $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i < j \leq d$ und $a_{ii} \neq 0$ für $i \in [1, d]$. Es sei v_i der Vektor

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \dots \\ a_{(d-1)i} \\ a_{di} \end{pmatrix}$$

Man beweise, dass die Vektoren $v_1, \dots, v_d$ eine Basis von K^d sind.

2) Man betrachte die Vektoren in $\mathbb{R}^6$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man beweise, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Man ergänze u_1, u_2, u_3 aus der Menge der Standardvektoren $\{e_1, \dots e_6\}$ zu einer Basis.

3) Es sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Es seien $W, W' \subset V$ zwei komplementäre Unterräume.

Man beweise, dass

$$\dim_K V = \dim_K W + \dim_K W'.$$

4) Es sei $n \geq 3$. Es seien $v_i = (a_{\ell i}) \in K^n$, $i = 1, 2, 3$ drei Vektoren, die linear unabhängig sind. Man beweise, dass es naürliche Zahlen $1 \leq \ell_1 < \ell_1 < \ell_3 \leq n$ gibt, so dass die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{K}^3$ linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} a_{\ell_1 1} \\ a_{\ell_2 1} \\ a_{\ell_3,1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{\ell_1 2} \\ a_{\ell_2 2} \\ a_{\ell_3,2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{\ell_1 3} \\ a_{\ell_2 3} \\ a_{\ell_3,3} \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Man kann den Basisergänzungssatz benutzen.)

Abgabe bis Donnerstag, 9.6.2016, 14:00