Lineare Algebra, Übung 4

1) Wir betrachten die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Man berechne die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

2) Wir betrachten die Menge der 2×2 Matrizen mit reellen Einträgen. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}.$$

Dann definiert man die Hauptinvolution von A:

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Man berechne $A + A^*$ und $A \cdot A^*$. Es sei B eine weitere 2×2-Matrix. Man beweise, dass

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*.$$

3) Es seien u_1, u_2, u_3 drei verschiedene reelle Zahlen. Es sei

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix}$$

Man finde alle 3×3-Matrizen A, so dass

$$U \cdot A = A \cdot U.$$

4) Es sei $C = (c_{ij})$ eine $r \times r$-Matrix (d.h. eine quadratische Matrix). Dann definiert man ihre Spur

$$\operatorname{Spur} C = \sum_{i=1}^{r} c_{ii}.$$

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $n \times m$-Matrix. Man beweise, dass $\operatorname{Spur}(A \cdot B) = \operatorname{Spur}(B \cdot A)$.

Abgabe bis Donnerstag, 12.5.2016, 14:00