4. Sei A ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x}_A = (1,1,0)^T$ und $\vec{n} = \frac{1}{5}(3,4,0)^T$ ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

   (a) Die Hessische Normalform der Ebenengleichung der Ebene des Punktes A mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ lautet: $(\vec{x} - \vec{x}_A) \cdot \vec{n} = 0$. Geben Sie zwei weitere Punkte dieser Ebene an.

   (b) Die Koordinatengleichung einer Ebene lautet: $x + y + z = 2$. Wie lautete die Hessische Normalform der Ebenengleichung dieser Ebene?

   (c) Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs O von den Ebenen in a) und b).

   (d) Berechnen Sie das Volumen eines Tetraeders mit den Punkten O, $\vec{x}_A$, $\vec{x}_B = (0,0,2)^T$ und $\vec{x}_C = (2,0,0)^T$. Berechnen Sie die Fläche eines der Seitenflächen-Dreiecke.

Lösung:

(a) Hess. Normalform "ausmultiplizieren":

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$3x - 3 + 4y - 4 = 0$$

z.B.:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0 + n_3 \cdot z_0$$

$$\Rightarrow n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1$$

$$\Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 2$$

z.B.:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(c)

$$\vec{x} = (0,0,0)^T$$

$$
\begin{aligned}
d_{(a)} &= \left|\frac{(\vec{x}-\vec{x}_A)\cdot\vec{n}}{\vec{n}}\right| \\
&= \frac{1}{5}\left|-1\cdot 3+(-1)\cdot 4+0\right| \\
&= \frac{7}{5} \\
d_{(b)} &= \left|\frac{(\vec{x}-\vec{x}_A)\cdot\vec{n}}{\vec{n}}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-1\cdot 1+(-1)\cdot 1+0\right| \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\left|\left[\vec{0A},\vec{0B},\vec{0C}\right]\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}\right| \\
&= \frac{4}{6}=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\left|\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 2\end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{3} \\
A_{\triangle 0AB} &= \frac{1}{2}\left|\left[\vec{0A}\times\vec{0B}\right]\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 0\end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{2} \\
A_{\triangle 0AC} &= \frac{1}{2}\left|\left[\vec{0A}\times\vec{0C}\right]\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}\right|\\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right|\\
&= 1\\
A_{\triangle 0BC} &= \frac{1}{2}\left|\left[0\vec{B} \times 0\vec{C}\right]\right|\\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}\right|\\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right|\\
&= 2
\end{aligned}
$$