Musterlösung zum 6. Aufgabenblatt zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(Autor: Gerrit-Arthur Gruben)

1. **Typische Klausuraufgabe** (3+3 Punkte)

   (a) Schreiben Sie den Term $\neg x \vee (x \wedge y \Rightarrow \neg z)$ semantisch äquivalent unter ausschließlicher Verwendung des NAND-Operators $\bar{\wedge}$.

   (b) Beweisen Sie: $t = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_m$ (wobei die l_i Literale sind) ist eine Tautologie dann und nur dann, wenn es Indizes $1 \leq a < b \leq m$ gibt mit $l_a = \overline{l_b}$.

Lösung:
(a) Mit $\bar{x} \equiv x \bar{\wedge} x$, $x \vee y \equiv \bar{x} \bar{\wedge} \bar{y}$ sowie den DeMorgan-Gesetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\overline{x} \vee (xy \rightarrow \overline{z}) &\equiv x \bar{\wedge} \overline{\overline{xy} \vee \overline{z}} \\
&\equiv x \bar{\wedge} \overline{\overline{x \bar{\wedge} y} \bar{\wedge} z} \\
&\equiv x \bar{\wedge} \overline{[(x \bar{\wedge} y) \bar{\wedge} (x \bar{\wedge} y)] \bar{\wedge} z} \\
&\equiv x \bar{\wedge} [([(x \bar{\wedge} y) \bar{\wedge} (x \bar{\wedge} y)] \bar{\wedge} z) \bar{\wedge} ([(x \bar{\wedge} y) \bar{\wedge} (x \bar{\wedge} y)] \bar{\wedge} z)]
\end{aligned}$$

(b)
'$\Leftarrow$': Da die Disjunktion kommutativ ist, können wir l_a und l_b nach 'vorne schieben'. Wir schreiben t also als:

$$t \equiv l_a \vee l_b \bigvee_{i \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{a,b\}} l_i$$

Jetzt gilt aber:

$$l_a \vee l_b \equiv l_a \vee \bar{l}_a \equiv 1$$

Wenden wir nun das Extremalgesetz an: $1 \vee x \equiv 1$ für einen beliebigen Term x, so erhalten wir $t \equiv 1$. Also ist t eine Tautologie.
'$\Rightarrow$': (mittels Kontraposition) Nehmen wir an, es existieren keine solche Indizes a und b. Wir konstruieren eine Belegung, bei der t zu 0 ausgewertet wird, d.h. t ist keine Tautologie.
Sei $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ die Variablenmenge, wobei jede Variable mindestens einmal in t auftritt. Wir zeigen nun, dass t keine Tautologie ist. Jede Variable tritt nicht gleichzeitig negiert und in nichtnegierter Form auf. Unter Ausnutzung der Kommutativität können wir gleiche Variablen nebeneinander schreiben und unter Ausnutzung der Idempotenz ($a \vee a \equiv a$) können wir ohne Einschränkungen annehmen, dass t die Form

$$t \equiv \bigvee_{i=1}^{n} l_i$$

mit $l_i \in \{x_i, \overline{x}_i\}$ hat. Ist $l_i = x_i$ so setze $x_i = 0$ und sonst $x_i = 1$. Offensichtlich wird unter dieser Belegung jedes Literal und somit ganz t zu 0 ausgwertet.

2. **Kontraposition** (3 Punkte)
Beweisen Sie die folgende Aussage durch Kontraposition: Sei (mindestens) eine von zwei ganzen Zahlen n und m nicht durch 3 teilbar, dann ist auch die Summe oder die Differenz von n und m nicht durch 3 teilbar.

Lösung:
Zuerst schreiben wir das zu zeigende mit Hilfe der Booleschen Aussagenlogik auf:
$3 \nmid n \vee 3 \nmid m \Rightarrow 3 \nmid (n-m) \vee 3 \nmid (n+m)$.
Aus der Kontraposition:
$3|(n-m) \ \wedge \ 3|n+m \Rightarrow 3|n \wedge 3|m$.
Es folgt mit Differenzbildung $(n+m-(n-m) = 2m$, dass $3|2m$. Da 3 und 2 teilerfremd sind, folgt $3|m$. Also existiert ein $c \in \mathbb{Z} : 3c = m$ und es existiert ein $d \in \mathbb{Z}$ mit $3d = n+m = n+3c$ und das ist äquivalent zu $n = 3\underbrace{(d-c)}_{\in\mathbb{Z}}$ also teilt 3 auch n.

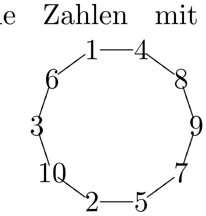
3. **Schubfach–Prinzip I** (3+4 Punkte)

   (a) In ein gleichseitiges Dreieck ABC mit Seitenlänge 1 werden 5 Punkte gezeichnet. Beweisen Sie, dass darunter ein Punktepaar ist mit Abstand $\leq 1/2$.

   (b) Gegeben seien $m \geq 1$ ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Zeigen Sie, dass es Indizes $0 \leq k < l \leq m$ gibt, so dass die Summe $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l$ ohne Rest durch m teilbar ist.

Lösung:
(a) Es liegt nahe, 4 Schubfächer zu konstruieren. Man betrachte die Mittelpunkte der drei Seiten und verbinde sie durch Strecken zu einem Dreieck. Damit wird das Ausgangsdreieck in 4 gleichseitige Dreiecke mit Seitenlängen $\frac{1}{2}$ zerlegt. Das Schubfachprinzip liefert nun zwei Punkte in einem dieser Dreiecke - der Abstand zwischen ihnen beträgt maximal $\frac{1}{2}$.
(b) Wir betrachten die Partialsummen $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ für $n = 1, \ldots, m$.
Fall 1: Es gibt ein $n \in \{1, \ldots, m\}$ mit $m \mid s_n$, dann sind $k = 0$ und $l = n$ die gesuchten Indizes.
Fall 2: Für alle $n \in \{1, \ldots, m\}$ ist s_n nicht Vielfaches von m. Betrachten wir die Reste bei der Division der s_n durch m, so sind dies Elemente aus $\{1, \ldots, m-1\}$ für alle n. Das Schubfachprinzip - die s_n sind die m Objekte, die wir in die Schubfächer der möglichen Reste packen - liefert uns r, n, n' mit $n \neq n'$ und $m|s_n - r$ (d.h. r ist der Rest) und $m|s_{n'} - r$ mit $r \in \{1, \ldots, m-1\}$. O.B.d.A. sei $n' > n$. Es gilt $m \,|\, s_{n'} - s_n$, d.h. $k = n$ und $l = n'$ leisten das Gewünschte.

4. **Schubfach-Prinzip II** (4 Punkte) Die Zahlen 1 bis 10 sind in beliebiger Reihenfolge zyklisch angeordnet, z.B. wie auf dem Bild unten. Beweisen Sie, dass es 3 nebeneinander stehende Zahlen mit Summe mindestens 17 gibt.



Verallgemeinern Sie die Aussage auf Zahlen 1 bis n und $k < n$ nebeneinander stehenden Zahlen. Geben Sie die entsprechende Formel an und begründen Sie diese.

Lösung:
Im dargestellten konkreten Fall findet man relativ schnell heraus, dass dem so ist. Wenn man glücklich ist, findet man gleich eine Konstruktion, die sich verallgemeinern lässt. Wir beweisen gleich im Allgemeinen: [1] Seien $x_1, \ldots, x_n \in \{1, \ldots, n\}$ die Zahlen in ihrer Reihenfolge. Setze $x_{n+i} := x_i$ für $i = 1, \ldots, k$ um die 'Überläufe' wohldefiniert werden zu lassen. Definiere die i-te Summe als

$$s_i := \sum_{j=i}^{i+k-1} x_j$$

für $i = 1, \ldots, n$. Es wird hier bei x_i angefangen und die nächsten $k-1$ Nachbarn im Uhrzeigersinn werden werden hinzuaddiert. Jede Zahl x_j tritt in k der Summen auf. Es folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i = k \sum_{i=1}^{n} i = k \frac{n(n+1)}{2}$$

da wir n Summen (Schubfächer!) haben, finden wir ein $s_i \geq \lceil k \frac{n+1}{2} \rceil$. Im obigen Beispiel ist $n = 10$, $k = 3$ und es ist

$$\lceil 3 \frac{11}{2} \rceil = 17$$

womit wir fertig sind.

[1] Ich habe diesen Ansatz erst im zweiten Versuch gefunden. Der erste Versuch war ein speziellerer Ansatz, der auf eine etwas bessere Abschätzung führt. Man entferne die 1 und bilde mit den anderen 9 Zahlen drei Dreiergruppen von Nachbarn. Deren Summe muss $55 - 1 = 54$ sein und das Schubfachprinzip liefert die Existenz einer Summe mit $\geq \lceil 54/3 \rceil = 18$.