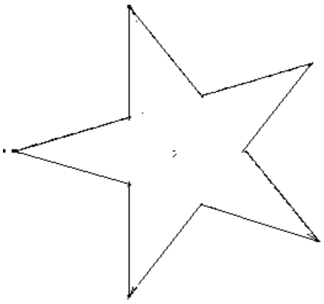
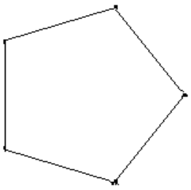
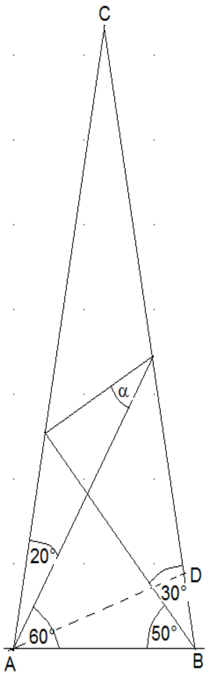
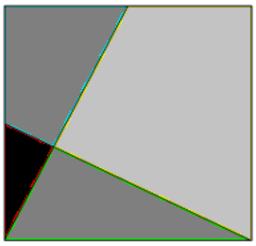
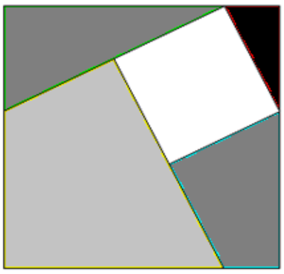






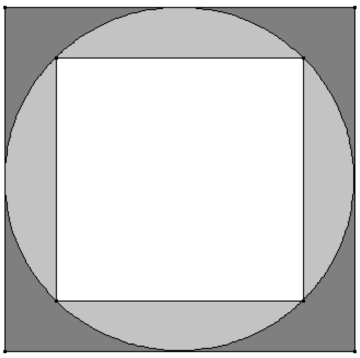


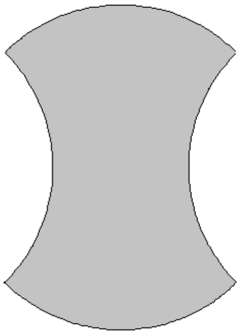


Roland Schröder

Denkaufgaben

aus der elementaren Geometrie





Inhaltsverzeichnis

Über dieses Buch

Vor Ihnen liegt eine Sammlung von Geometrieaufgaben, die fast ausnahmslos nicht in Schulbüchern zu finden sind. Die Aufgaben behandeln einerseits durchaus schulübliche geometrische Objekte wie Dreieck, Viereck und Kreis. Aber darüber hinaus geht es auch um ungewöhnliche, im Mathematikunterricht kaum behandelte Formen wie Sterne oder Parkette. Außerdem werden in einigen Aufgaben Zusammenhänge zwischen Geometrie und anderen Disziplinen der Mathematik aufgedeckt. Schließlich kommen einige Mathematiker zu Wort, denen wir schöne Aufgaben und ihre Lösungen verdanken, deren Namen aber in Vergessenheit gerieten.

Ursache für das Fehlen der vorliegenden Aufgaben in Schulbüchern könnte sein, dass die Lösungsideen für die meisten Aufgaben nicht naheliegend sind. Für das Gelingen von Lösungen sind Beharrlichkeit des Lösers und die Gelegenheit zur Muße oft unerlässliche Voraussetzungen. Daneben müssen auch heuristische Prinzipien bekannt sein und heuristische Verfahren angewendet werden. Im allgemein praktizierten Mathematikunterricht wird das Thema ‚Heuristik‘ nicht aufgegriffen. Gelegenheit zur Muße kann Schulunterricht allenfalls im Rahmen von Hausaufgaben gewähren und dort auch nur genutzt werden, wenn Schülerinnen und Schüler über die Tugend der Beharrlichkeit verfügen. Wer sich allerdings bis zur Lösung durchbeißt, wird dann belohnt, wenn sie oder er in der Lage ist, das Glück zu empfinden, das eine selbständige Lösung auslöst.

Keine Sammlung von Mathematikaufgaben ist vollkommen frei von Anregungen entstanden. Die meisten Anregungen zu den vorliegenden Aufgaben gehen auf die sogenannten ‚Treitz Rätsel‘ zurück, die der 2017 verstorbene Physik-Didaktiker Norbert Treitz im Internet bei spektrum.de veröffentlicht hat. Auch er hat sich zu seinen Rätseln anregen lassen und gibt die Quellen dazu – wie unter Wissenschaftlern üblich – genau an. Aber auch diese Quellenangaben gewährleisten nicht, dass dort die originären Aufgaben zu den Rätseln zu finden sind. Sehr selten ist eine Aufgabe nach ihrem

Erfinder (Langleys Aufgabe) oder ein Satz, der die Aufgabe veranlasste, nach seinem Entdecker (Satz von van Aubel, Satz von Ceva, Satz von Miquel) benannt. Aber solche Benennungen müssen nicht zwangsläufig die Urquelle nennen. So sind zum Beispiel die ‚Konstruktionen von Mascheroni' in Wahrheit 100 Jahre zuvor vom Dänen Mohr beschrieben worden.

Ein Urheberrecht auf mathematische Aufgaben könnte gar nicht durchgesetzt werden und existiert vermutlich auch nicht. Die in diesem Buch abgedruckten Aufgaben sind keine Kopien von Vorgängeraufgaben, sondern überarbeitet und ergänzt, um sie in den Bereich des Lösbaren zu rücken. Abgesehen von den 'Treitz Rätseln' wird keine Quelle genannt. Der Autor bittet dafür um Verständnis.

1 Der Satz des Pythagoras und verwandte Sätze

Satz des Pythagoras: Sind a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c, dann gilt $a^2+b^2=c^2$.

Höhensatz des Euklid: Der Fußpunkt H der Höhe h auf der Hypotenuse c teilt c in zwei Hypotenusenabschnitte p und q und es gilt: $h^2=p\cdot q$.

Kathetensatz des Euklid: Sei a eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c und p derjenige Hypotenusenabschnitt der eine gemeinsamen Punkt mit a hat, dann gilt $a^2=p\cdot c$.

1.1 Rechtwinklige Dreiecke im Quadrat

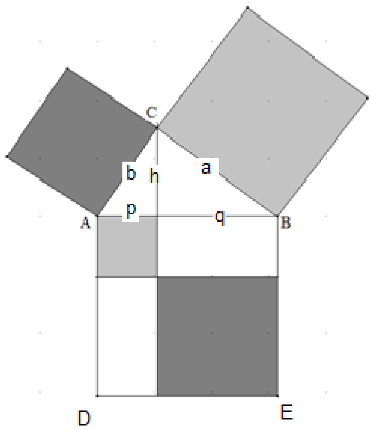
Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a = √13 cm, b = √17 cm und c = √20 cm.

a) Zeigen Sie, dass sich die Punkte A, B und C auf den Seiten eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm anordnen lassen.

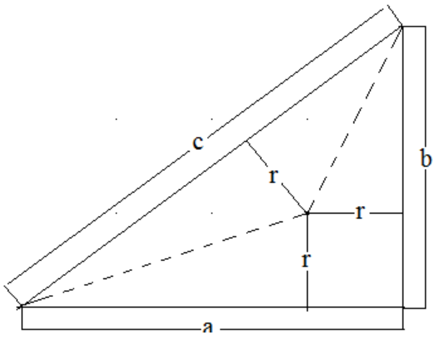
b) Berechnen Sie auf der Basis bisheriger Ergebnisse den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

1.2 Fast Pythagoras

Das Dreieck ABC ist **nicht** rechtwinklig. Das Lot von C auf AB teilt AB in die Abschnitte p und q. ADEB ist ein Quadrat. Zeigen Sie: Die hellgrau unterlegten Quadrate haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie die dunkelgrau unterlegten Quadrate zusammen.



1.3 Inkreismittelpunkt



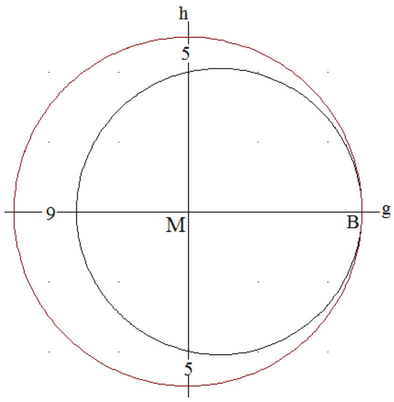
a) Zeigen Sie: Für den Inkreisradius r im rechtwinkligen Dreieck gilt r = ½ (a+b-c). Verwenden Sie nebenstehende Skizze.

b) Zeigen Sie: Für den Inkreisradius r im rechtwinkligen Dreieck gilt $r = \frac{ab}{a+b+c}$

c) Beweisen Sie mit Hilfe der Gleichungen aus a) und b) den Satz des Pythagoras.

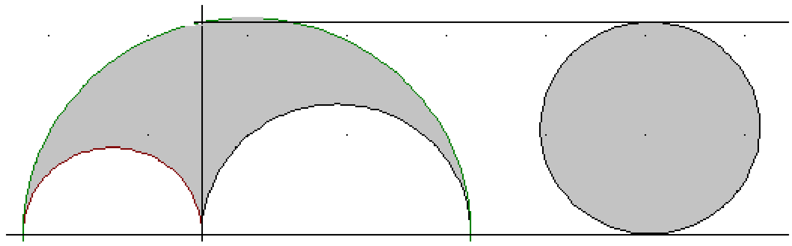
1.4 Zwei Kreise

Die Mittelpunkte zweier Kreise und ihr Berührpunkt B liegen auf einer Geraden g. M sei der Mittelpunkt des größeren Kreises. Die Senkrechte auf g in M sei h. Der Abstand zwischen den Kreisen auf g ist 9 cm, der Abstand zwischen den Kreisen auf h ist in beiden Fällen 5 cm (siehe Abbildung). Wie groß sind die Radien der Kreise?



1.5 Schustermesser

Die linke graue Fläche hat die Form der Klinge eines Schustermessers. Zeigen Sie, sie ist ebenso groß wie die rechte Kreisfläche.

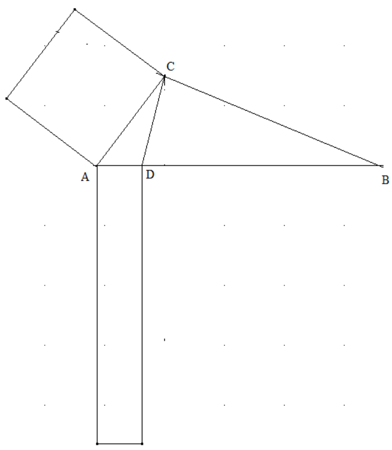


1.6 Satz von Tabit

In einem stumpfwinkligem Dreieck ABC liege D auf $\overline{AB}$, sodass die Dreiecke ABC und ADC ähnlich sind. Dann ist das Quadrat mit der Seite $|\overline{AC}|$ flächengleich zum Rechteck aus $|\overline{AD}|$ und $|\overline{AB}|$.

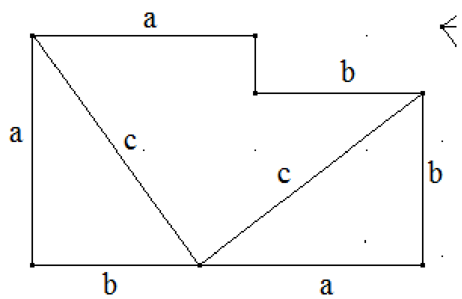
a) Beweisen Sie diesen Satz.

b) Wie erhält man daraus den Kathetensatz von Euklid?

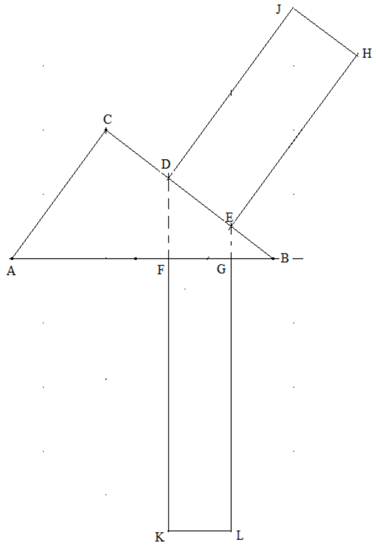


1.7 Ein Pythagoras-Beweis

Wie kann die diese Skizze zum Beweis des Satzes des Pythagoras verwendet werden?



1.8 Kathetenwegsatz



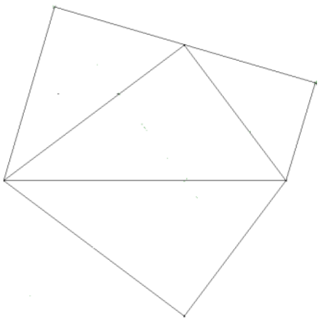
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck und $\overline{DE}$ ein beliebiger Abschnitt auf einer Kathete. F und G seien die Fußpunkte der Lote von D bzw. E auf AB. Über $\overline{DE}$ hat das Rechteck DEHJ die Länge $|\overline{EH}| = |\overline{BC}|$. Über $\overline{FG}$ hat das Rechteck GFKL die Länge $|\overline{GL}| = |\overline{AB}|$.

a) Zeigen Sie, dass die Rechtecke DEHJ und GFKL flächengleich sind.

b) Mit diesen Erkenntnissen lässt sich auch der Satz des Pythagoras beweisen. Führen Sie den Beweis.

1.9 Rechtwinklige Dreiecke an einem rechtwinkligen Dreieck

Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC seien die Hypotenusen dreier zu ABC ähnlicher, rechtwinkliger Dreiecke (siehe Abbildung).



a) Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Pythagoras, dass die Summe der Flächen der Dreiecke über den Katheten AC und BC gleich der Fläche des Dreiecks über der Hypotenuse AB ist.

b) Beweisen Sie mit dem Ergebnis von a) den Satz des Pythagoras.

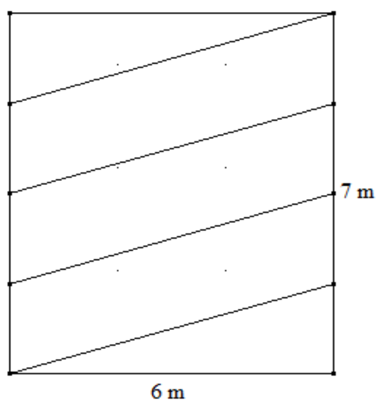
1.10 Ein besonderer Punkt im Dreieck

a) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen 6 cm und 8 cm. Gesucht ist ein Punkt P, sodass die Dreiecke ABP, BCP und CAP den gleichen Flächeninhalt haben. Welche Abstände hat dieser Punkt P von den drei Seiten des gegebenen Dreiecks?

b) Bestätigen Sie: Die Kehrwerte der unter a) ermittelten Abstände sind die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks.

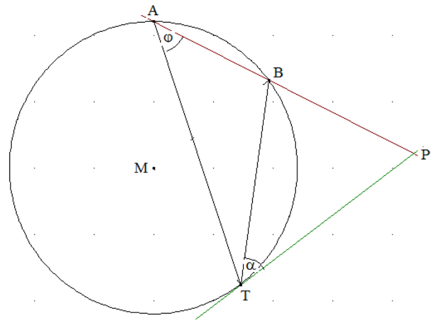
c) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit beliebigen Kathetenlängen. Gesucht ist ein Punkt P, sodass die Dreiecke ABP, BCP und CAP den gleichen Flächeninhalt haben. Zeigen Sie: Die Kehrwerte der Abstände von P zu den Seiten sind die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks.

1.11 Teppichboden



Ein rechteckiger Raum mit der Länge 7 m und der Breite 6 m soll mit Teppichboden ausgelegt werden, der in einem Stück und aufgerollt angeliefert wird (also als „Läufer“/ als langes Rechteck). Der Teppichboden wird so verlegt, wie die Skizze zeigt, und es werden nur 5 gerade Schnitte entlang der Raumwände erforderlich. Wie lang und wie breit ist das angelieferte Teppichstück, wenn keine Reste bleiben?

1.12 Pythagoras und Sekanten-Tangentensatz

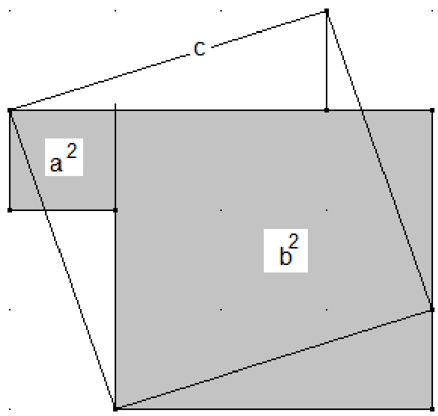


Gegeben sind ein Kreis um den Punkt M und ein Punkt P außerhalb des Kreises. Die Sekante durch P schneidet den Kreis in A und in B. Die Tangente durch P berührt den Kreis in T. Dann sagt der Sekanten-Tangenten-Satz: $|\overline{PT}|^2 = |\overline{PA}| \cdot |\overline{PB}|$.

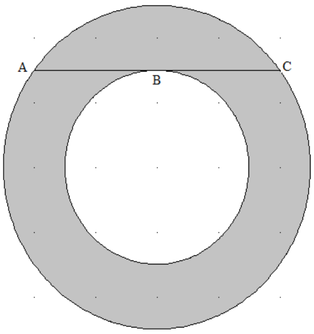
Beweisen Sie den Satz von Pythagoras mit Hilfe des Sekanten-Tangenten-Satzes. Hinweis: Legen Sie PA durch M.

1.13 Pythagoras visualisiert

In einem Quadrat mit der Seitenlänge c werden die Quadrate mit den Flächen a^2 und b^2 so untergebracht, dass zunächst einige Flächenteile überstehen (siehe Abbildung). Zeigen Sie, dass sich die Überstände ebenfalls im Quadrat mit der Seitenlänge c unterbringen lassen.



1.14 Kreisring

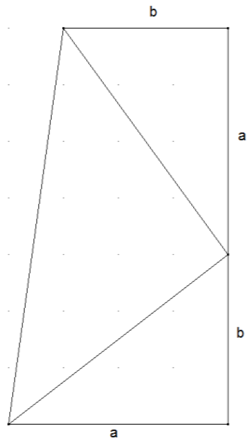


Zwei Kreise mit gleichem Mittelpunkt schließen einen sogenannten Kreisring ein. Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreisringes (grau unterlegt), wenn der große Kreis aus der Tangente an den kleinen Kreis in einem Punkt B eine Strecke $\overline{AC}$ mit der Länge 8 cm herausschneidet?

1.15 Sehnenvierecke mit besonderen Eigenschaften

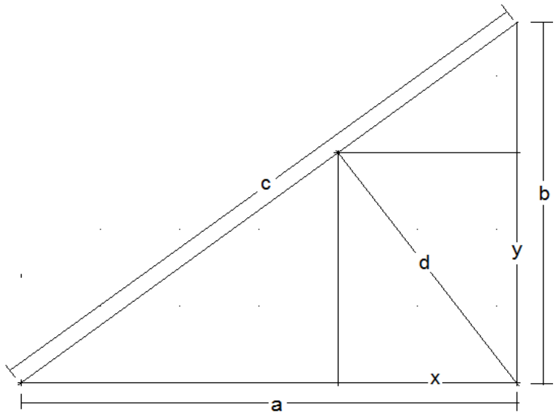
Gesucht sind die Umkreise von Sehnenvierecken mit zwei gegenüberliegenden Winkeln von je 90° und vier verschiedenen Seitenlängen sowie deren Konstruktionsprinzipien. Erklären Sie, wie Ihnen $(w^2+x^2)\cdot(y^2+z^2) = (wy+xz)^2+(wz-xy)^2=(wz+xy)^2+(wy-xz)^2$ bei der Lösung dieser Aufgaben helfen kann.

1.16 Trapez und Pythagoras



Gegeben ist ein Trapez mit den Längen a und b der parallelen Seiten. Eine weitere Seite ist gleichzeitig Höhe des Trapezes und hat die Länge a+b (siehe Skizze). Beweisen Sie mit dieser Figur den Satz von Pythagoras.

1.17 Rechteck und Pythagoras



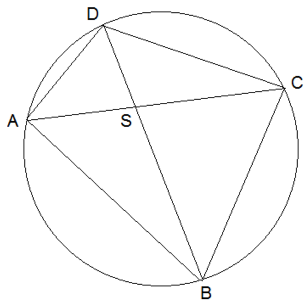
Einem rechtwinkligen Dreieck wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass dessen Seite x auf der Kathete a, dessen Seite y auf der Kathete b, ein Eckpunkt auf der Hypotenuse c und dessen Diagonale d senkrecht auf der Hypotenuse c steht (siehe Abbildung).Zeigen Sie: ay+bx=cd und $\frac{y}{a}=\frac{d}{c}=\frac{x}{b}$ und beweisen Sie mit Hilfe dessen den Satz des Pythagoras.

1.18 Sehnensatz und Höhensatz von Euklid

Der Sehnensatz lautet: Zwei Sehnen AC und BD eines Kreises schneiden sich in S. Dann gilt $|\overline{AS}| \cdot |\overline{CS}| = |\overline{BS}| \cdot |\overline{DS}|$.

Zeigen Sie: Wenn eine Sehne Durchmesser des Kreises ist und die andere Sehne senkrecht dazu verläuft, dann ist der Sehnensatz identisch mit dem Höhensatz von Euklid.

1.19 Ptolemäus und Pythagoras



Der Satz des Ptolemäus lautet: In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Längen der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Längen gegenüberliegender Seiten. In einem Sehnenviereck ABCD gilt also $|\overline{AC}| \cdot |\overline{DB}| = |\overline{AB}| \cdot |\overline{DC}| + |\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|$. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mit Hilfe des Satzes von Ptolemäus.

1.20 Pythagoreisches Dreieck aus zwei pythagoreischen Dreiecken

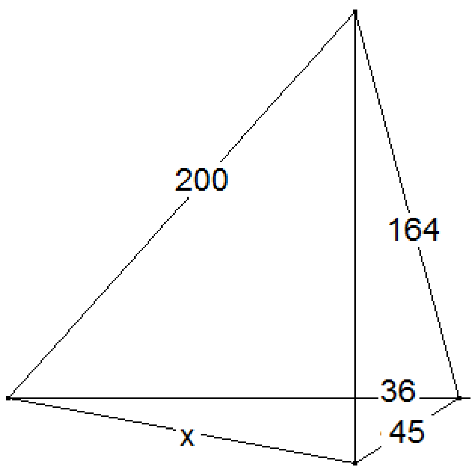
Ein rechtwinkliges Dreieck soll pythagoreisch heißen, wenn alle Seitenlängen natürliche Zahlen sind.

a) Zeigen Sie: Wenn das Tripel (a, b, c) aus den beiden Kathetenlängen a und b sowie der Hypotenusenlänge c ein pythagoreisches Tripel ist, dann sind auch (a^2,ab,ac) sowie (ab,b^2,bc) pythagoreische Tripel mit den Hypotenusenlängen ac bzw.bc.

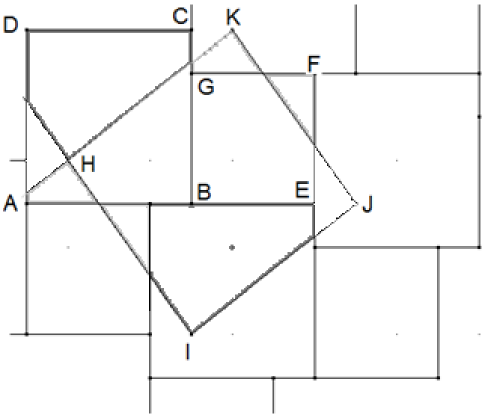
b) Ein rechtwinkliges Dreieck wird entlang seiner Höhe h auf der Hypotenuse in zwei kleinere rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Gibt es nun pythagoreische Dreiecke, die sich auf diese Weise in zwei pythagoreische Dreiecke aufteilen lassen?

1.21 Viereck mit orthogonalen Diagonalen

Gegeben ist ein Viereck mit orthogonalen Diagonalen und drei Seitenlängen 45 mm, 164 mm und 200 mm sowie der Abstand 36 des Diagonalen-schnittpunktes von einem Eckpunkt (sieheAbbildung). Wie lang ist die vierte Seite?



1.22 Pythagoras-Parkett



Mit Quadraten kongruent zu ABCD und BEFG lässt sich die Ebene parkettieren (siehe Abbildung). Auf dieses Parkett wird das Quadrat HIJK so gelegt, dass HK parallel zu AG ist und $|\overline{HK}| = |\overline{AG}|$.

Zeigen Sie, dass dann nebenstehende Skizze den Satz von Pythagoras beweist.

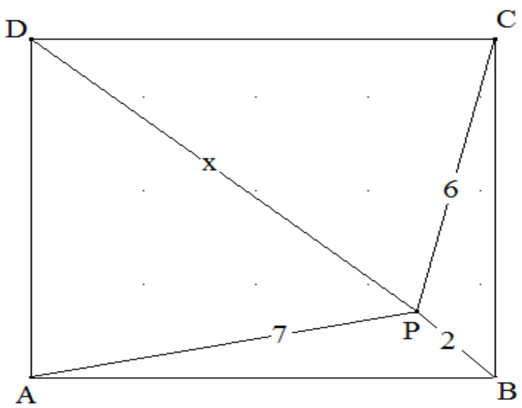
1.23 Hypotenusenquadrat

a) Zeigen Sie: In einem rechtwinkligen Dreieck geht die Winkelhalbierende des rechten Winkels durch den Schnittpunkt der Diagonalen des Hypotenusenquadrates.

b) Zeigen Sie: In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Winkelhalbierende des rechten Winkels das Hypotenusenquadrat in zwei flächengleiche Stücke.

1.24 Abstand von der Ecke

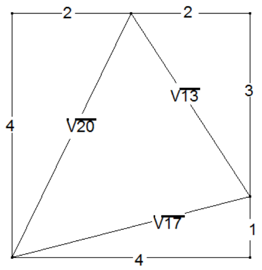
Der Punkt P im Inneren des Rechtecks ABCD hat von A den Abstand 7, von B den Abstand 2 und von C den Abstand 6. Welchen Abstand hat P von D?



Lösungen

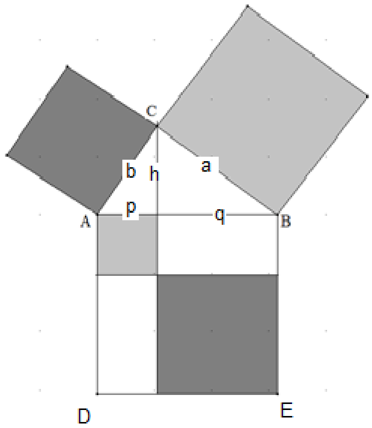
1.1

a)

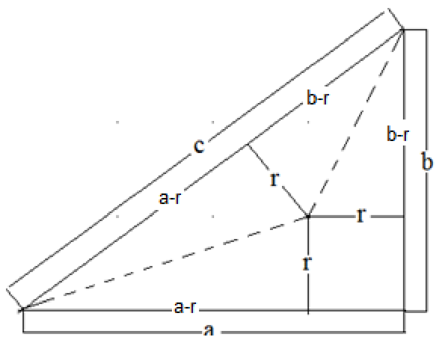


b) 16 – 3 – 4 – 2 = 7

1.2 Nach Pythagoras gilt
(1) $h^2+p^2=b^2$ und (2) $h^2+q^2=a^2$.
(1) – (2) ergibt $p^2 - q^2=b^2 - a^2$
oder $p^2+a^2=b^2+q^2$.



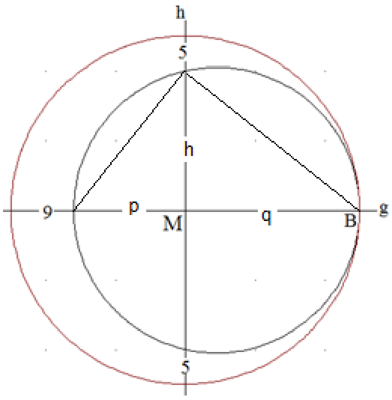
1.3 a) Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Daher lässt sich aus neben-stehender Skizze $c = a - r + b - r$ ablesen. Auflösen nach r ergibt $r = ½ (a+b-c)$.



b) r sei jeweils Höhe in den drei Dreiecken mit a, b und c als Grundseiten: Dann gilt $\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=\frac{ab}{2}$. Auflösen nach r ergibt r = $\frac{ab}{a+b+c}$.

c) Gleichsetzen der Ergebnisse aus a) und b) führt zu $\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a+b-c}{2}$. Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner ergibt $2ab = ((a+b)-c)\cdot((a+b)+c)=(a+b)^2-c^2$ und schließlich $a^2+b^2=c^2$.

1.4 Führen Sie diese Hilfslinien und Bezeichnungen ein:



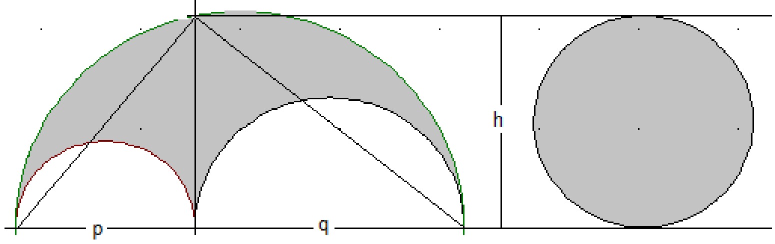
Dann ist (1) $h^2=p\cdot q$ und

(2) $p+9=q$ sowie (3) $h=q-5$.

Das sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Lösungen: p=16, q=25 und h=20.

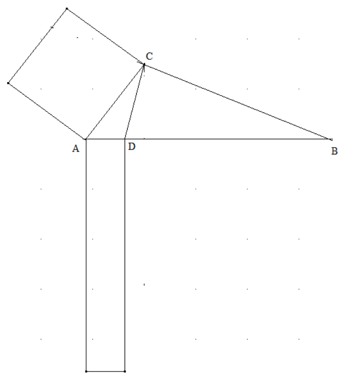
1.5 Mit den Größen p, q und h aus der Skizze gilt:

$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(p+q)^2}{4}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p^2}{4}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{q^2}{4}=\frac{\pi}{8}[(p+q)^2-p^2-q^2]=\frac{\pi}{8}\cdot 2pq=\pi\cdot\frac{h^2}{4}$.

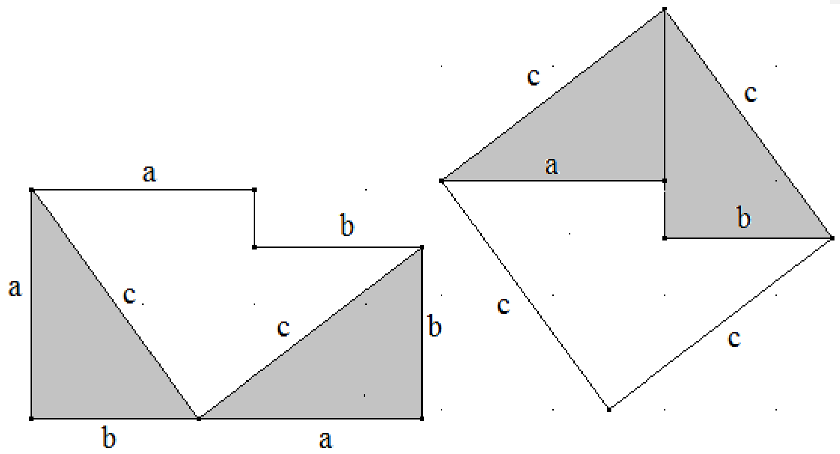


1.6 a) Nennen Sie $|\overline{AC}| = a$, $|\overline{AD}| = d$ und $|\overline{AB}| = c$. Dann gilt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\frac{d}{a} = \frac{a}{c}$ und nach Multiplikation mit dem Hauptnenner $a^2=d \cdot c$.

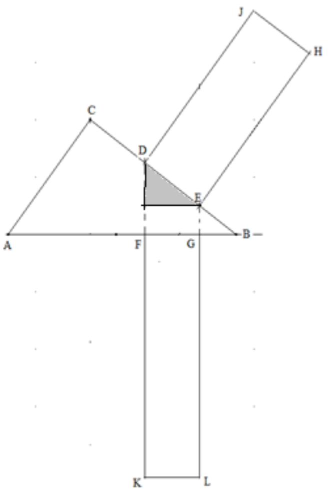
b)Wählen Sie in einem rechtwinkligen Dreieck d als Projektion von a auf c. Dann ist das der Kathetensatz.



1.7 Die linke Figur (unten) hat den Flächeninhalt a^2+b^2. Die rechte Figur hat den Flächeninhalt c^2. Verschieben Sie die grauen Dreiecke aus der linken Figur in die rechte Figur, dann ist $a^2+b^2=c^2$-



1.8 a) Das kleine graue Dreieck ist ähnlich zum Dreieck ABC. Daher gilt: Das Verhältnis der Hypotenusenlängen ist gleich dem Verhältnis der Längen der längeren Katheten:



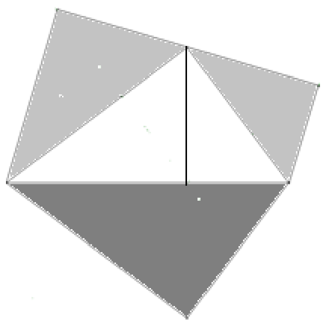
$\frac{|\overline{DE}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{FG}|}{|\overline{BC}|}$ und daher

$|DE| \cdot |BC| = |AB| \cdot |FG|$ und
wegen $|\overline{EH}| = |\overline{BC}|$ und $|\overline{GL}| = |\overline{AB}|$
gilt $|DE| \cdot |\overline{EH}| = |\overline{GL}| \cdot |FG|$.

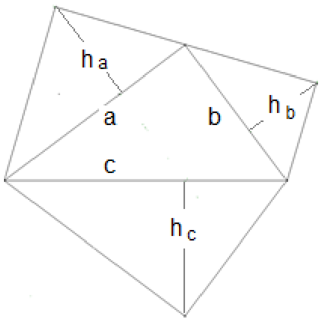
c) Für $|DE| = |CB|$ ist das der Kathetensatz und zusammen mit dem Kathetensatz zur anderen Kathete der Satz von Pythagoras.

1.9

a) Spiegeln Sie die hellgrauen Dreiecke an den Katheten, dann entsteht das weiße Dreieck, das kongruent zum dunkelgrauen Dreieck ist.



b) Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt $\frac{h_a}{a} = \frac{h_c}{c}$ und folglich (1) $h_a = \frac{h_c \cdot a}{c}$. Aus dem gleichen Grunde gilt $\frac{h_b}{b} = \frac{h_c}{c}$ und folglich (2) $h_b = \frac{h_c \cdot b}{c}$. Außerdem gilt $\frac{a \cdot h_a}{2} + \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ und folglich (3) $a \cdot h_a + b \cdot h_b = c \cdot h_c$. (1) und (2) in (3) eingesetzt ergibt $a^2 \frac{h_c}{c} + b^2 \frac{h_c}{c} = c \cdot h_c$. Durchmultiplizieren mit $\frac{c}{h_c}$ ergibt $a^2+b^2=c^2$.

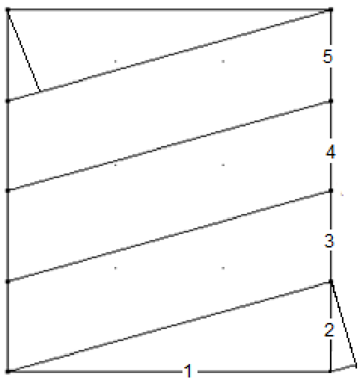


1.10 c) Aufgabenteil c) ist die Verallgemeinerung von a) und b) und wird daher zuerst gelöst. a und b seien die Katheten und c=$\sqrt{a^2+b^2}$ sei die Hypotenuse. Dann ist die Gesamtfläche F=$\frac{a \cdot b}{2}$ und die Einzelfläche f=$\frac{a \cdot b}{6}$. x, y bzw z seien die Höhen auf a, b bzw. c. Dann ist $\frac{a \cdot x}{2} = \frac{a \cdot b}{6}$ oder x=$\frac{b}{3}$. Entsprechend ist y=$\frac{a}{3}$ und z·c=$\frac{a \cdot b}{3}$ oder z=$\frac{a \cdot b}{3 \cdot \sqrt{a^2+b^2}}$. Zu zeigen ist $\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a \cdot b}\right)^2$ oder $\frac{9}{a^2} + \frac{9}{b^2} = \frac{9 \cdot (a^2+b^2)}{a^2 \cdot b^2}$, was sich nach Division durch 9 und Addition der Brüche zeigen lässt.

a) x=$\frac{8}{3}$, y=2 und z=$\frac{6 \cdot 8}{3 \cdot \sqrt{6^2+8^2}}$=1,6.

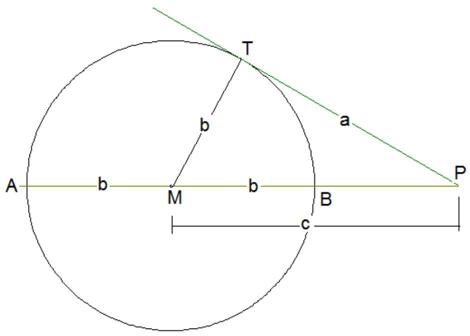
b) 1,6=$\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ und $\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2$

1.11 Die Abbildung zeigt die Schnittlinien 1 bis 5 sowie die Zusammensetzung der entstandenen 6 Einzelstücke. Eines der Einzelstücke (in der Abbildung unten) zeigt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten der Längen 6 und $\frac{7}{4}$. Dann ist die Hypotenuse $\sqrt{6^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = 6{,}25$. Aus der Fläche

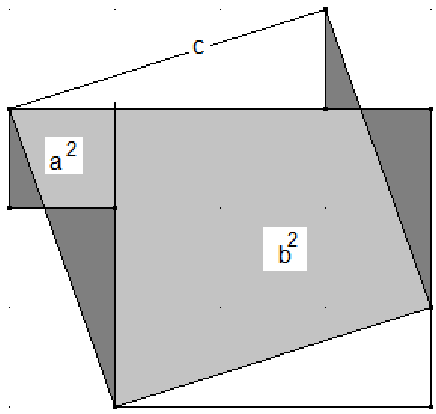


5,25 und der Grundseite 6,25 dieses Dreiecks lässt sich seine Höhe (Breite der Teppichrolle) h=1,68 und dann aus der Zimmerfläche 42 und der Teppichbreite die Teppichlänge 25 bestimmen (alle Angaben in m).

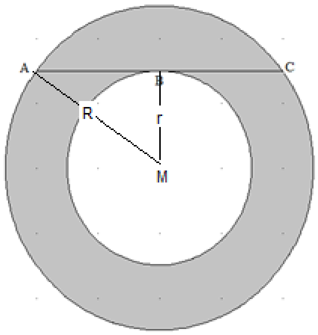
1.12 $|\overline{PT}|^2 = |\overline{PA}| \cdot |\overline{PB}|$. Legen Sie PA durch M. Sei $|\overline{PM}|$=c. Dann ist (c+b)(c-b)=a². Durch Umformung wird daraus a²+b²=c²-



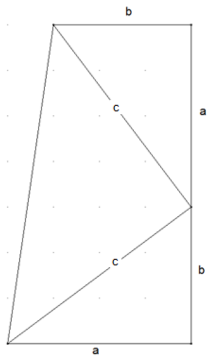
1.13 Verschieben Sie die Überhänge außerhalb des großen Quadrats in die Flächen gleicher Färbung innerhalb des großen Quadrats.



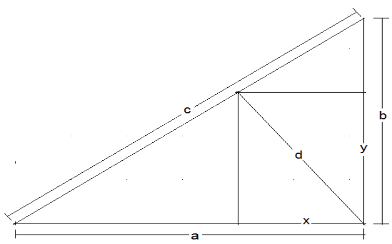
1.14 R sei der Radius des äußeren Kreises und r der Radius des inneren Kreises. Dann ist $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$ der Flächeninhalt des Kreisringes. Außerdem gilt nach Pythagoras $R^2 - r^2 = 16$. Die Fläche des Kreisringes ist also 16π.



1.15 Für Sehnenvierecke mit den Seitenlängen a, b, c und d sowie zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln muss gelten $a^2+b^2=c^2+d^2$. Für $a=wy+xz$, $b=wz-xy$, $c=wz+xy$ und $d=wy-xz$ hilft die gegebene Gleichung, diese Bedingung zu erfüllen. Der Durchmesser des Umkreises ist dann $\sqrt{(w^2+x^2)\cdot(y^2+z^2)}$.



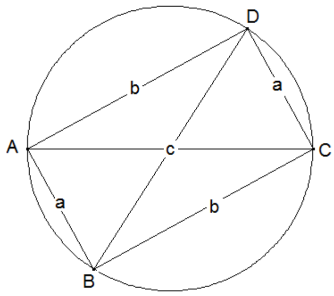
1.16 Die Trapezfläche berechnet sich einerseits als $\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot(a+b)$ und andererseits als $\frac{1}{2}\cdot ab + \frac{1}{2}\cdot ab + \frac{1}{2}\cdot c^2$. Dann ist $(a+b)^2 = 2ab + c^2$ oder $a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$ und dann $a^2+b^2=c^2$.



1.17 d zerlegt das Dreieck mit der Fläche $\frac{1}{2}\cdot d\cdot c$ in zwei Teildreiecke mit den Flächen $\frac{1}{2}\cdot a\cdot y$ und $\frac{1}{2}\cdot b\cdot x$. Daher ist $\frac{1}{2}\cdot d\cdot c = \frac{1}{2}\cdot a\cdot y + \frac{1}{2}\cdot b\cdot x$ oder (1) $d\cdot c = a\cdot y + b\cdot x$. Alle rechtwinkligen Dreiecke in der Skizze sind ähnlich zueinander. Daher gilt $\frac{Höhe}{Hypotenuse} = \frac{d}{c} = \frac{y}{a} = \frac{x}{b}$. Daraus folgt (2) $\frac{d\cdot b}{c} = x$ und (3) $\frac{d\cdot a}{c} = y$. (2) und (3) in (1) eingesetzt, ergibt $d\cdot c = \frac{a^2\cdot d}{c} + \frac{b^2\cdot d}{c}$. Durchmultiplizieren mit $\frac{c}{d}$ ergibt $a^2+b^2=c^2$.

1.18 Wählen Sie eine Sehne als Durchmesser ihres Kreises und eine Sehne senkrecht dazu. Dann ist der Sehnensatz gerade der Höhensatz von Euklid.

1.19 Wählen Sie ein Rechteck als Sehnenviereck. Dann ist der Satz von Ptolemäus gerade der Satz von Pythagoras.



1.20 a) Sei (a, b, c) ein pythagoreisches Tripel, dann gilt $a^2+b^2=c^2$ und nach Multiplikation mit a^2 gilt $a^2a^2+a^2b^2=a^2c^2$ oder $(a^2)^2+(ab)^2=(ac)^2$. Damit ist (a^2, ab, ac) ein pythagoreisches Tripel. Entsprechendes gilt für eine Multiplikation mit b^2.

b)Wählen Sie h=ab als Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten ac und bc sowie der Hypotenuse a^2+b^2.

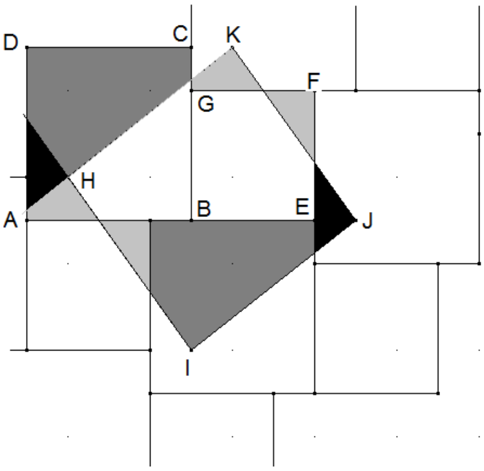
1.21 $\sqrt{164^2 - 36^2} = 160$,

$\sqrt{200^2 - 160^2} = 120$,

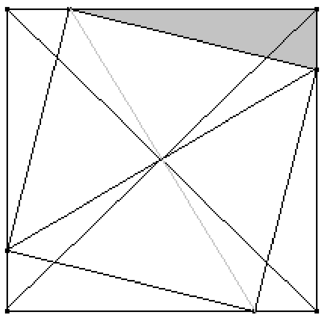
$\sqrt{45^2 - 36^2} = 27$,

$\sqrt{120^2 + 27^2} = 123$.

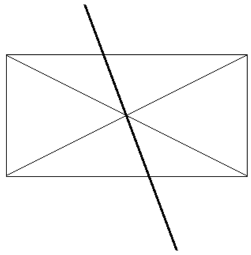
1.22 Jedes der Drei-, Vier- oder Fünfecke, welche das Quadrat HIJK ausfüllen, ist kongruent zu einem Drei-, Vier-, Fünfeck, das die Gesamtfläche der Quadrate ABCD und BEFG ausfüllen (kongruente Flächen sind mit gleichem Farbton unterlegt).



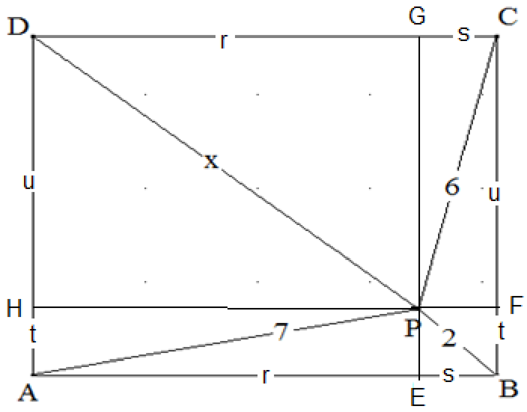
1.22 a) Die Diagonalenschnittpunkte eines Quadrates und seines einbeschriebenen Quadrates sind identisch. In der Darstellung ist das Hypotenusenquadrat einbeschrieben in ein Quadrat, auf dessen Seiten die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks (grau) liegen.



b) In jedem Rechteck teilt eine Gerade durch den Diagonalenschnittpunkt das Rechteck in zwei kongruente, flächengleiche Teile. Das gilt insbesondere für das Hypotenusenquadrat.



1.23 Ziehen Sie die Parallele durch P zu CB im Abstand s. Ihr Abstand von DA sei dann r. Ziehen Sie die Parallele durch P zu AB im Abstand t. Ihr Abstand von DC sei dann t. Dann gilt



(1) $s^2+t^2=4$

(2) $r^2+t^2=49$ und daher (2) – (1) $r^2 - s^2 =45$. Außerdem gilt:

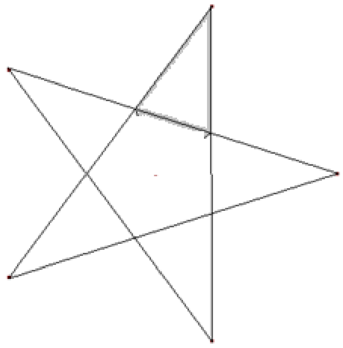
(3) $u^2+s^2=36$

(4) $u^2+r^2=x^3$ und daher (4) – (3) $r^2 – s^2 =x^2 – 36$.

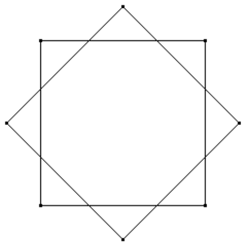
Damit ist $x^2–36=45$ und $x^2=81$ und folglich $x=9$.

2 Regelmäßige n-Ecke und n,k-Sterne

Ein regelmäßiges n-Eck ist ein geschlossener konvexer Streckenzug aus n gleichlangen Strecken mit n gleichgroßen Innenwinkeln.



Ein n,k-Stern entsteht, wenn man n Punkte regelmäßig auf einem Kreis verteilt und die Punkte von A_0 bis A_{n-1} im Kreise herum benennt. Dann ergeben alle Verbindungsstrecken $\overline{A_i A_{i+k}}$ (i=0, 1, 2, 3, …) einen n,k-Stern (für i+k>n ist n zu subtrahieren). Die Abbildungen zeigen einen 8,2-Stern (unten) und einen 5,2-Stern (oben).



2.1 Alle Zacken

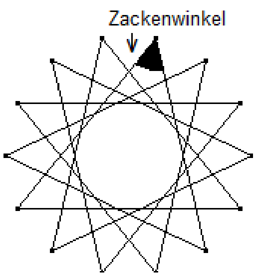
Welche Bedingung muss für n und k gelten, damit der n,k-Stern mit einem Streckenzug ohne erneut anzusetzen n Zacken hat?

2.2 Zackenwinkel

Seien n und k teilerfremd und k' die kleinere der beiden Zahlen k und n-k.

a) Begründen Sie: Ein Schiff, das den Kurs eines n,k-Sterns durchfährt bis es wieder in seiner Startposition steht, dreht sich dabei k'-mal um seine eigene Achse.

b) Sei α der Zackenwinkel (das ist der an jeder Zacke gleiche Winkel, siehe Abbildung) eines n,k-Sterns. Zeigen Sie: dann gilt $\alpha=\frac{180°(n-2k')}{n}$.

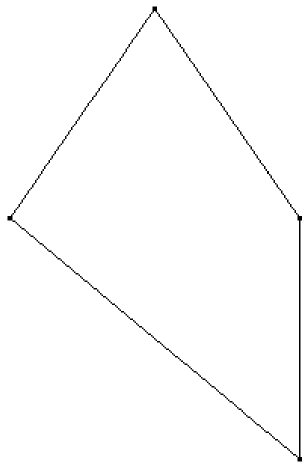


2.3 Zwölfeck aus 12 kongruenten Vierecken

Drei Seiten und eine Diagonale eines Vierecks seien gleichlang, die Länge der vierten sei das $\sqrt{2}$-fache jeder anderen Seitenlänge.

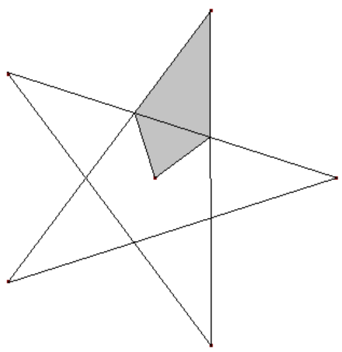
a) Zeigen Sie: 12 solche Vierecke parkettieren ein regelmäßiges Zwölfeck.

b) Zeigen Sie: 24 solche Vierecke parkettieren ein größeres regelmäßiges Zwölfeck.



2.4 5,2-Stern

Welchen Umkreisradius hat ein aus 10 grauen Drachen (Abbildung) zusammengesetzter 10,3-Stern, wenn r der Umkreisradius des dargestellten 5,2-Sternes ist?



2.5 Achtecke

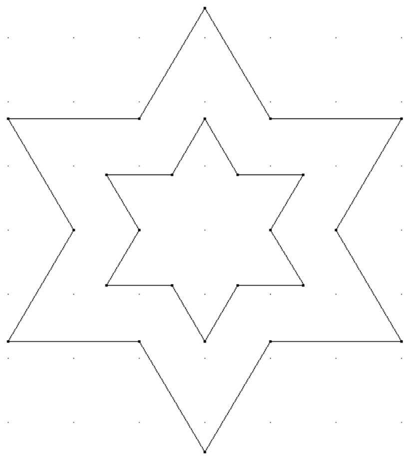
Gegeben sind 8 kongruente Rauten mit dem spitzen Winkel der Größe 45° und der Seitenlänge a sowie 8 gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge a. Parkettieren Sie unter Verwendung aller Teile damit

a) ein regelmäßiges Achteck. Bestimmen Sie zunächst die Seitenlänge des Achtecks in Abhängigkeit von a. Wo tritt diese Länge bei den Einzelteilen auf?

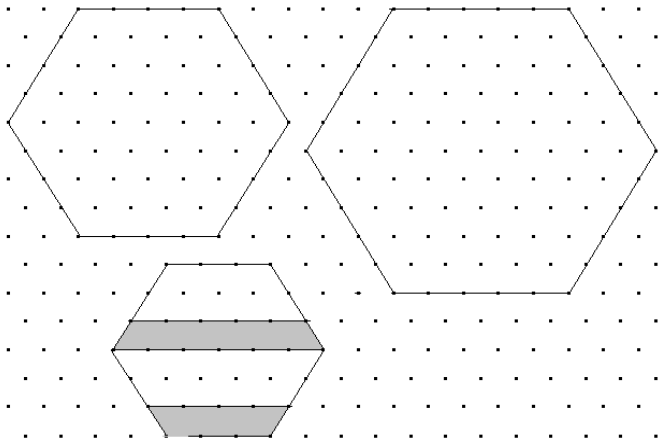
b) zwei kongruente regelmäßige Achtecke. Bestimmen Sie zunächst die Seitenlänge jedes der beiden Achtecke in Abhängigkeit von a. Wo tritt diese Länge bei den Einzelteilen auf?

2.6 6,2-Sterne

Die zwölf Seitenlängen des inneren Sterns sind genau halb so lang wie die zwölf Seitenlängen des äußeren Sterns. Zerlegen Sie den Streifen zwischen innerem und äußerem Stern mit 12 Schnitten so, dass aus den Teilen drei Sterne von der Form und der Größe des inneren Sterns zusammengesetzt werden können.



2.7 Sechsecke



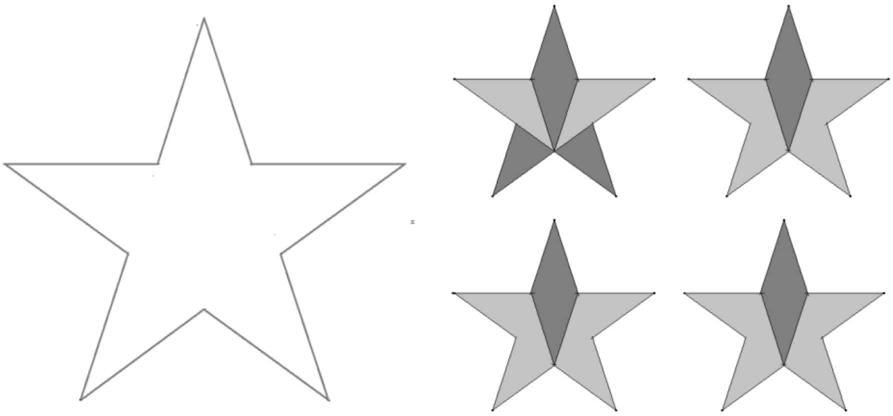
Gegeben sind drei regelmäßige Sechsecke. Das kleinste Sechseck unten wird – wie dargestellt – in vier Teile zerlegt. Mit diesen vier Teilen und dem mittelgroßen Sechseck (links) lässt sich das rechte Sechseck (rechts) vollständig auslegen.

a) Führen Sie das Auslegen durch.

b) Welche notwendige Bedingung müssen die Seitenlängen der drei Sechsecke erfüllen, damit eine derartige Aufgabe lösbar ist?

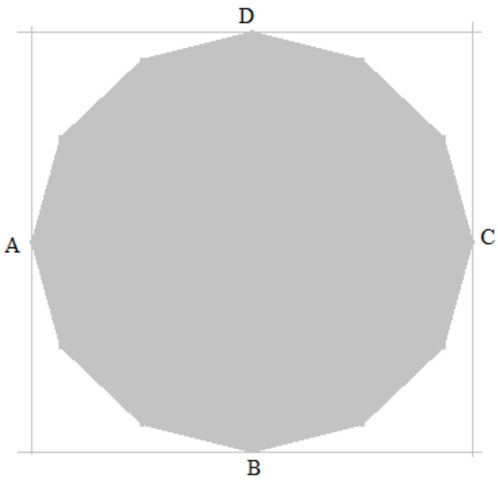
2.8 Pentagramme

Zerschneiden Sie die vier kleinen Pentagramme in die dargestellten Teile und legen Sie das große Pentagramm mit den Teilen aus.



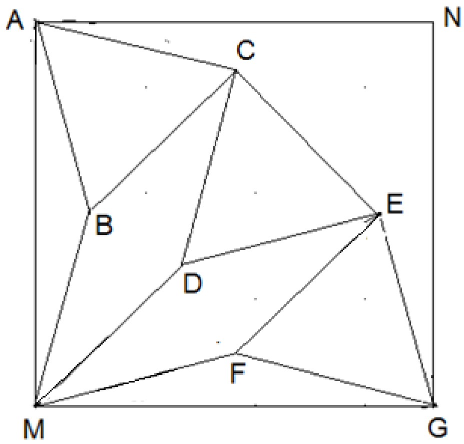
2.9 Zwölfeck

A, B, C, D seien die Seitenmitten eines Quadrats und gleichzeitig vier Eck-punkte eines regelmäßigen Zwölfecks. Der wievielte Teil der Quadratfläche wird von der Fläche des Zwölfecks bedeckt?



2.10 Nochmal: Flächenvergleich Zwölfeck/Quadrat

ABCDEFG ist ein Polygonzug, der ein Viertel eines 12,5-Sterns begrenzt.

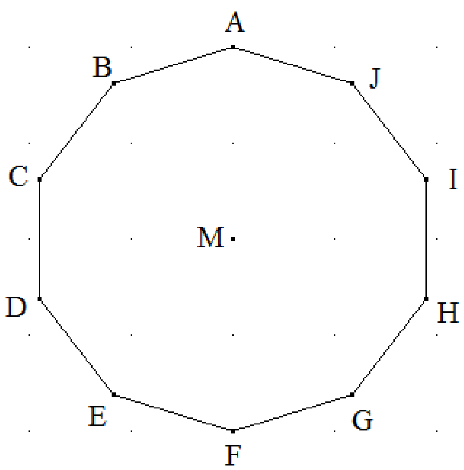


a) Bestimmen Sie die Größen der Winkel ACE und BCD. Begründen sie dann, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

b) Bestimmen Sie alle Winkel im Viereck MDCB und begründen Sie u.a. damit, dass es eine Raute ist.

c) Bestimmen Sie das Flächenverhältnis des Dreiecks MGE zum Quadrat MGNA?

2.11 Regelmäßiges Zehneck

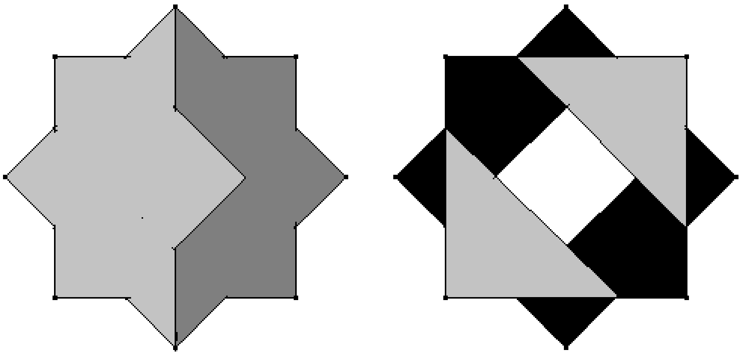


Einem regelmäßigen Zehneck

ABCDEFGHIJ mit dem Umkreismittelpunkt M seien die Dreiecke ADH und MEG einbeschrieben. Zeigen Sie, dass die Dreiecke ADH und MEG ähnlich sind.

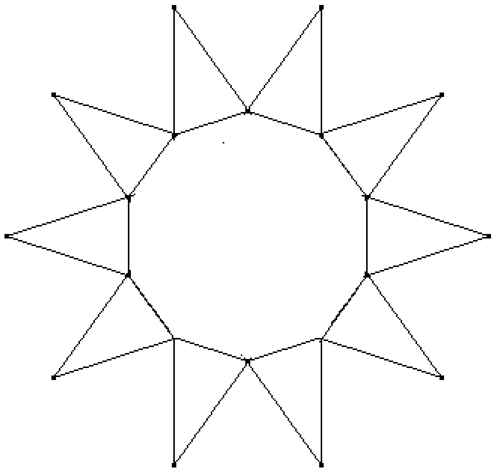
2.12 8,2-Sterne

Zwei 8,2-Sterne sind so zerschnitten, wie die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt. Legen Sie die Teile zu einem 8,2-Stern mit dem doppelten Flächeninhalt zusammen.



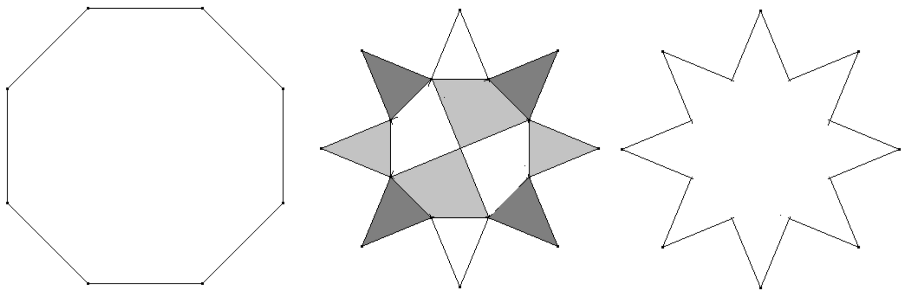
2.13 10,4-Stern

Die Zacken eines 10,4-Sterns werden wie dargestellt abgeschnitten und in veränderter Lage an das verbliebene 10-Eck angesetzt, sodass ein neuer n,k-Stern entsteht. Welche Bezeichnung hat dieser Stern (n=?, k=?)?



2.14 Zwei 8,3-Sterne

Einer von zwei 8,3-Sternen wird in 12 Teile zerschnitten. Mit diesen 12 Teilen sowie einem weiteren 8,3-Stern soll ein regelmäßiges Achteck ausgelegt werden.

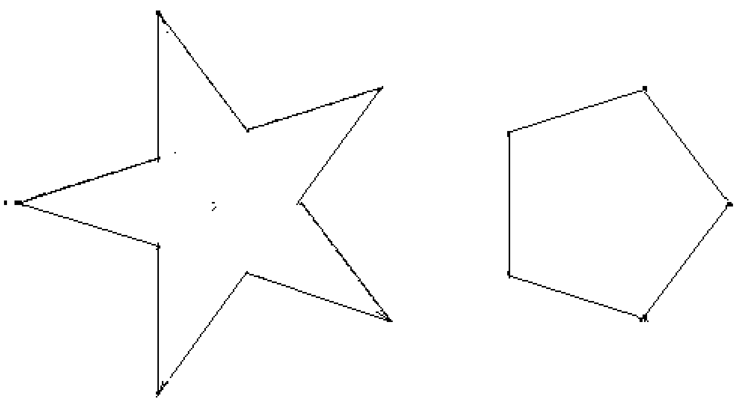


2.15 Ptolemäus und Fünfeck

Der Satz des Ptolemäus lautet: In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Längen der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Längen gegenüberliegender Seiten. Beweisen Sie damit den Satz; Im regelmäßigen Fünfeck ist das Verhältnis aus Diagonalenlänge und Seitenlänge $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

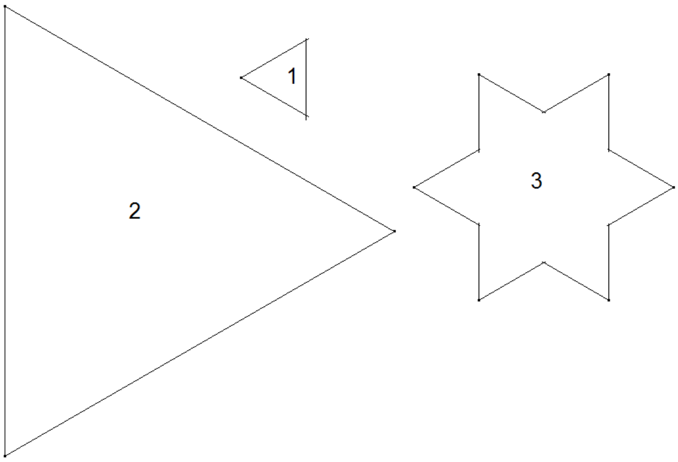
2.16 5,2-Sterne und regelmäßige Fünfecke

Zwei 5,2-Sterne und sechs regelmäßige Fünfecke gleicher Seitenlängen sollen zu einem regelmäßigen 10-Eck zusammengesetzt werden. Dazu müssen die 5,2-Sterne zerschnitten werden.



2.17 6,2-Sterne

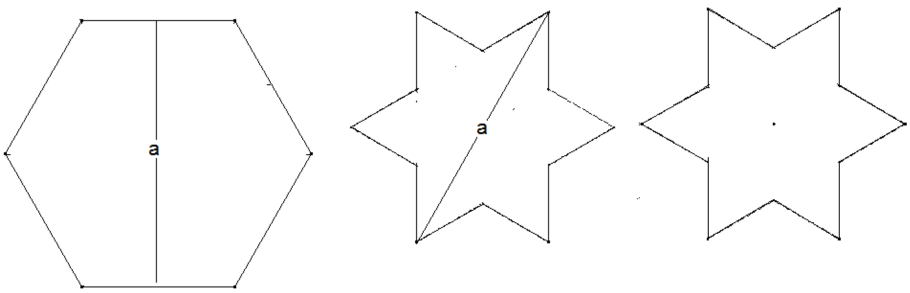
Sowohl in das gleichseitige Dreieck (2) als auch in drei Sterne (3) passen 36 gleichseitige Dreiecke (1):



In welche minimale Anzahl von Teilen muss man drei Sterne (3) zerlegen, um damit das gleichseitige Dreieck (1) auslegen zu können.

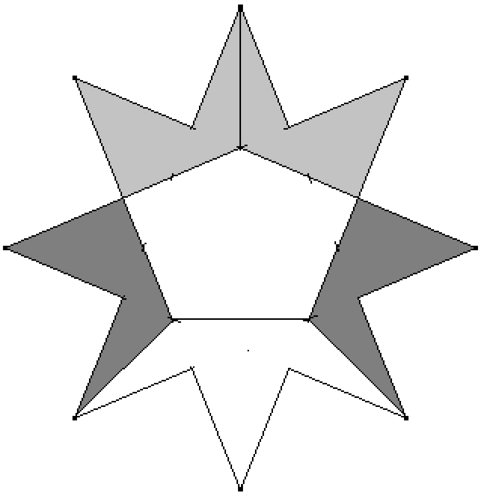
2.18 6,2-Sterne und 6,1-Polygon

Zerlegen Sie zwei 6,2-Sterne so in je drei Stücke, dass ein regelmäßiges Sechseck damit ausgelegt werden kann (die mit a bezeichneten Strecken seien gleichlang).

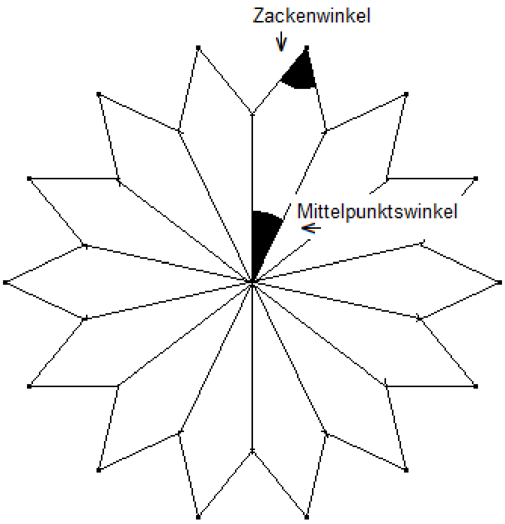


2.19 Es ist leicht, nur durch Falten Seitenhalbierende oder Winkelhalbierende zu konstruieren. Falten Sie ein quadratisches Stück Papier auf zwei verschiedene Arten so, dass die Faltlinien ein regelmäßiges Achteck ergeben.

2.20 Kann man aus den gegebenen Teilen eines 8,3-Sterns ein regelmäßiges Achteck zusammenlegen?



2.21 Die nebenstehende Skizze soll darstellen, was unter einem Zackenwinkel bzw. einem Mittelpunktswinkel eines n,k-Sterns zu verstehen ist. Wenn der Zackenwinkel eines n,k-Sterns doppelt so groß ist wie sein Mittelpunktswinkel dann lässt sich der n,k-Stern zu zwei $\frac{n}{2}$,j –Sternen umbauen.



a) Die Abbildung zeigt einen 14,5-Stern, der sich zu zwei 7,j-Sternen umbauen lässt. Bestimmen Sie j.

b) Sei n eine gerade Zahl. Welche Beziehung muss zwischen k und j bestehen, damit sich ein n,k-Stern zu zwei $\frac{n}{2}$,j-Sternen umbauen lässt.

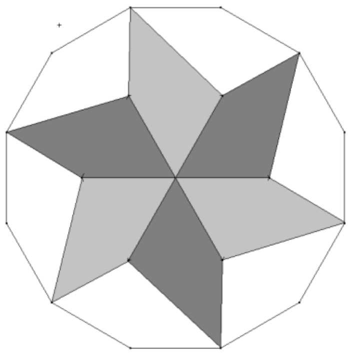
Lösungen

2.1 n und k müssen teilerfremd sein.

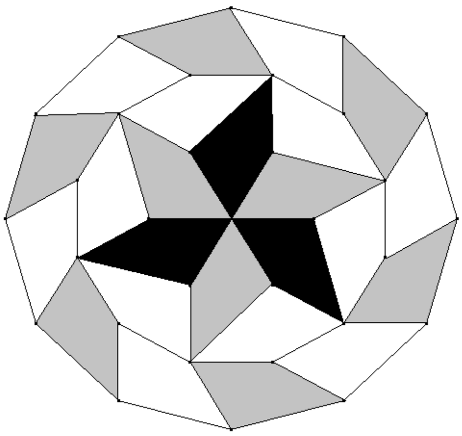
2.2 a) Die Zahlenpaare (Anzahl der Kursänderungen |volle Drehungen um die Schiffsachse) sind quotientengleich. Ein derartiges Zahlenpaar ist $\left(\frac{n}{k'}|1\right)$. Dann ist auch (n|k‘) ein solches Zahlenpaar. Nach n Kursänderungen hat das Schiff k‘ Drehungen um die eigene Achse gemacht.

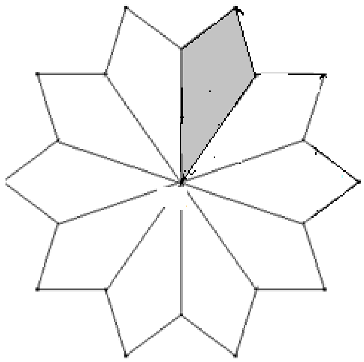
b) Sei α der Zackenwinkel. Dann ist die Kursänderung an jeder Zacke 180°-α. Unter Blick auf a) gilt: n·(180°-α)=k‘·360°. Aufgelöst nach α gilt: $\alpha=\frac{180°(n-2k')}{n}$.

2.3 a)



b)

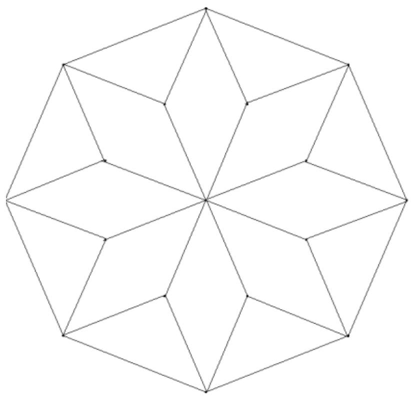




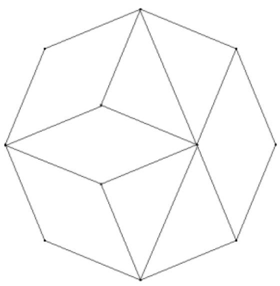
2.4 Der 5,2-Stern kann in 5 Teile (grau unterlegt) zerteilt werden, von denen 10 zu einem 10,3-Stern zusammengesetzt werden können. Der Umkreisradius ist also der gleiche.

2.5

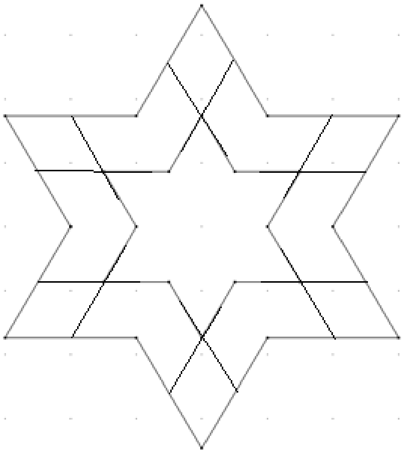
a) Jede Raute hat den Flächeninhalt $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$, jedes Dreieck hat den Flächeninhalt $\frac{a^2}{2}$. 8 Rauten und 8 Dreiecke haben zusammen den Flächeninhalt $4a^2 \cdot (1+\sqrt{2})$. Ein Achteck mit er Seitenlänge b hat den Flächeninhalt $2b^2 \cdot (1+\sqrt{2})$. Dann ist $b=a \cdot \sqrt{2}$. Das ist genau die Basis jedes der 8 Dreiecke. Diese werden an den Rand des Achtecks gelegt:

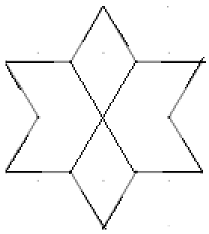


b) Kongruente n-Ecke sind flächengleich. Jedes jetzt auszulegende Achteck hat den halben Flächeninhalt des Achtecks unter a). Die neuen Achtecke sind mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zentrisch gestreckte Bilder des Achtecks unter a). Beide neuen Achtecke haben die Seitenlänge a und die nebenstehende Aufteilung.

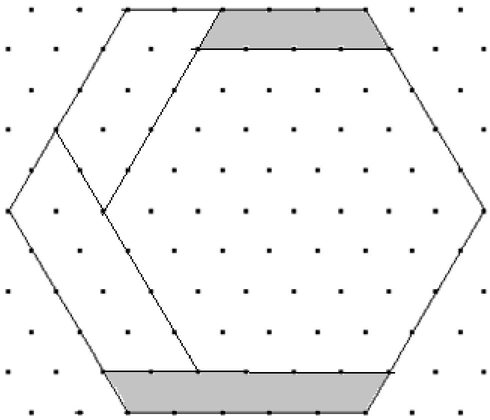


2.6 Bei dieser Aufteilung können aus den Einzelteilen drei weitere kleinere Sterne gelegt werden:



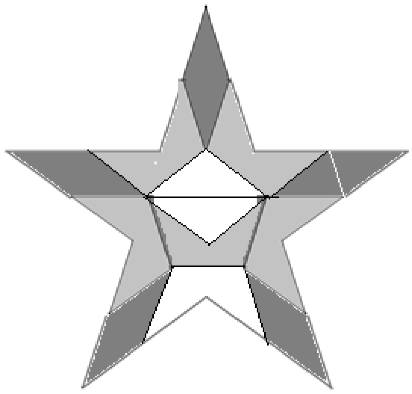


2.7 a)



b)Wenn a und b die beiden kürzeren Seitenlängen sind und c die längere, dann muss $a^2+b^2=c^2$ gelten.

2.8 Rechts das ausgelegte Pentagramm.

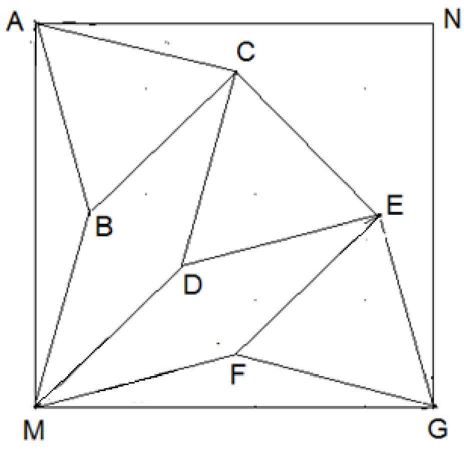


2.9

In der Formelsammlung findet man: Für den Flächeninhalt F eines Zwölfecks mit dem Umkreisradius r gilt $F=3r^2$. Das Quadrat mit der Seitenlänge 2r hat den Flächeninhalt $4r^2$.

2.10

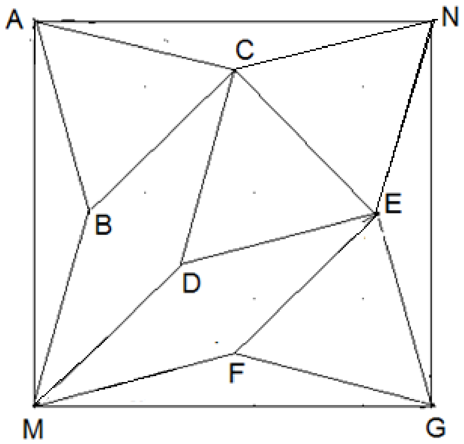
a) Winkel ACE ist Innenwinkel eines regelmäßigen Zwölfecks und daher $\frac{(12-2)\cdot 180}{6}$=150°.



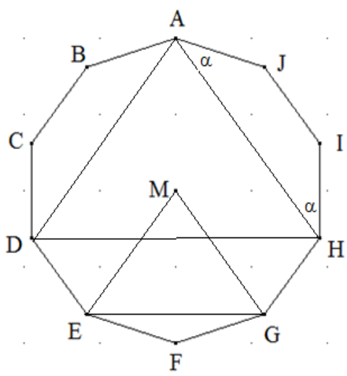
Winkel BCD. Ist Zackenwinkel eines 12,5-Sterns und folglich $\frac{180°(12-2\cdot 5)}{12} = 30°$. Dann ist der Winkel BCA 60° und dann auch der Winkel BAC. Die Schenkel BA und BC sind gleichlang. Daher ist ABC ein gleichseitiges Dreieck.

b) Der Winkel FMG ist die Hälfte von 30° und ein Sechstel von 90°. Folglich ist MGF ein gleichseitiges Dreieck und daher sind alle Strecken im Inneren des Quadrats MGNA gleichlang. Das Viereck MDCB ist eine Raute.

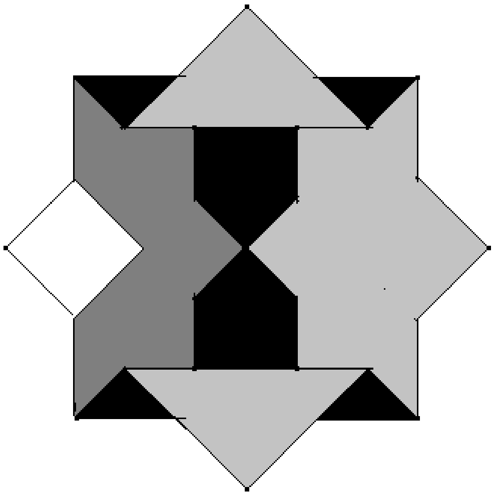
c) Das Dreieck MGE ist aus zwei kongruenten gleichschenkligen und einem gleichseitigen Dreieck zusammengesetzt. Das Quadrat MGNA enthält acht kongruente gleichschenklige und vier kongruente gleichseitige Dreiecke. Also hat das Quadrat MGNA den vierfachen Flächeninhalt des Dreiecks MGE.



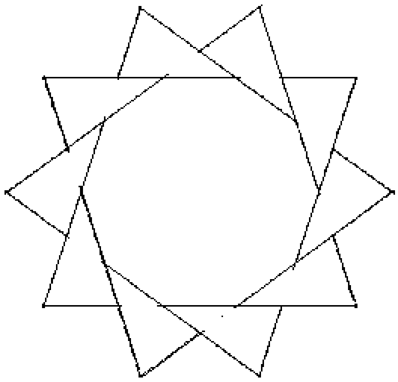
2.11 Jeder Innenwinkel des Zehnecks ist $\frac{(10-2)\cdot 180°}{10}$=144°. Im Viereck AHIJ gilt: 2α+288°=360° und daher α=36°. Das Gleiche gilt für den Winkel DAB. Dann berechnet sich der Winkel DAH als 144°- 2·36°=72°. Die Dreiecke DHA und EGM sind gleichschenklig. Der Winkel EMG ist ein Fünftel des Vollwinkels und daher 72° groß. Gleichschenklige Dreiecke mit dem gleichen Winkel gegenüber der Basis sind ähnlich.



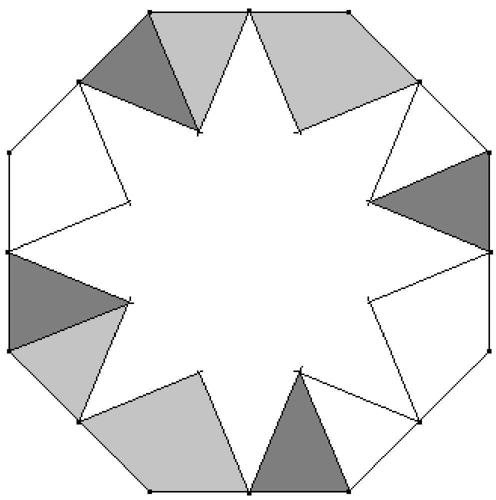
2.12



2.13 Die abgeschnittenen Zacken sind gleichschenklige Dreiecke. Da ein 10,4-Stern aus zwei 5,2-Sternen zusammengesetzt ist, hat der Zackenwinkel die Größe $\frac{180°\cdot(5-2\cdot 2)}{5}$=36°. Dann sind die Basiswinkel der abgechnittenen Dreiecke je 72° groß. Diese werden in obiger Figur zu Zackenwinkeln des neuen 10,k-Sterns. Darin gilt für k 72°=$\frac{180°(10-2k)}{10}$. Aufgelöst nach k ergibt das k=3. Es ist also ein 10,3-Stern.

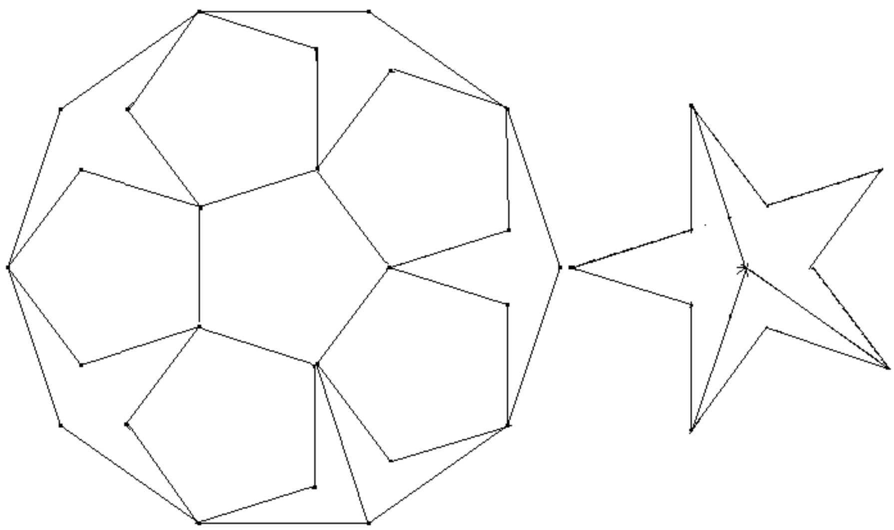


2.14 Hier die Auslegung:

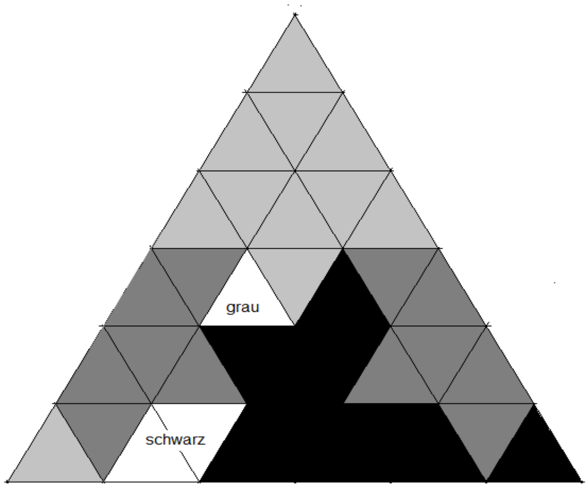


2.15 Ein regelmäßiges Fünfeck besteht aus einem gleichschenkligen Trapez und einem gleichschenkligen Dreieck. Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks sind auch Diagonalen des Trapezes, das auch Sehnenviereck ist. Für die Seitenlänge s und die Diagonalenlänge d des regelmäßigen Fünfecks gilt nach Ptolemaios: $sd+s^2=d^2$. Nach Division durch d^2 ergibt sich: $\frac{s}{d}+\left(\frac{s}{d}\right)^2=1$. Nach Substitution von $\frac{s}{d}=x$ entsteht die quadratische Gleichung $x+x^2=1$ mit den Lösungen . Die negative Lösung entfällt hier.

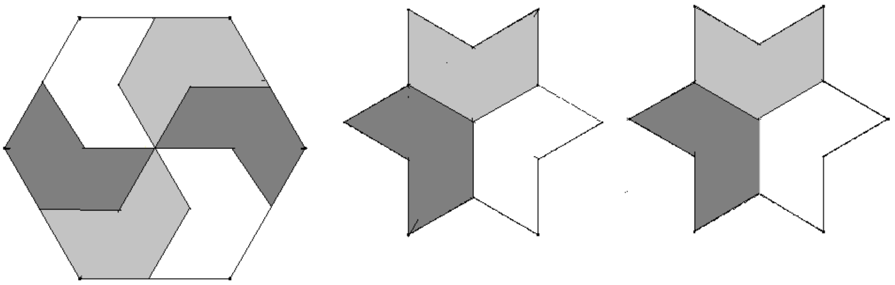
2.16 Ein Hinweis auf die Lösung:



2.17 Es genügen acht Teile. Teile gleicher Farbe können jeweils zu einem Stern zusammengesetzt werden.

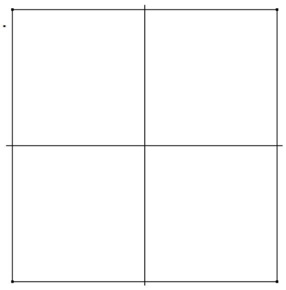


2.18 Hier die Zerlegung und die Auslegung:

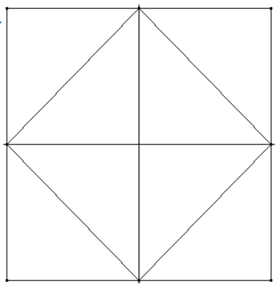


2.19 Erste Möglichkeit:

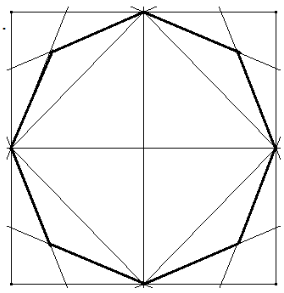
1.



2.

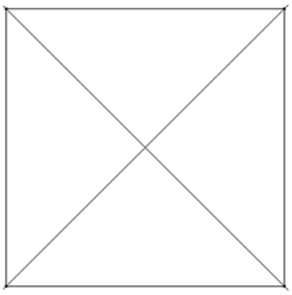


3.

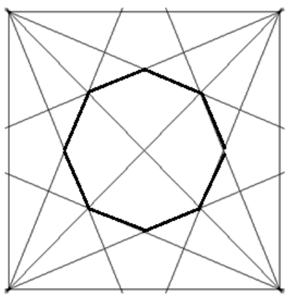


Zweite Möglichkeit:

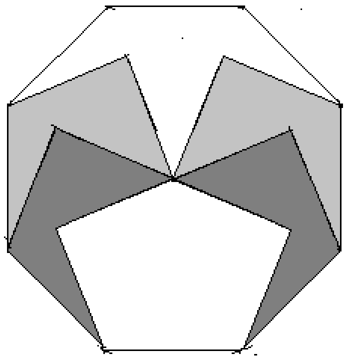
1.



2.



2.20 Ja, so:



2.21 a) Aus Aufgabe 2.2 wissen wir: Der Zackenwinkel α eines n,k-Sterns berechnet sich als $\alpha=\frac{180°(n-2k')}{n}$. Für einen7,j-Stern ergibt sich $\frac{180°(7-2j)}{7}$. Dies soll der Mittelpunktswinkel eines 14,5-Sterns sein, also $\frac{180°(7-2j)}{7}=\frac{360°}{14}$. Dann ist 7-2j=1 und j=3.

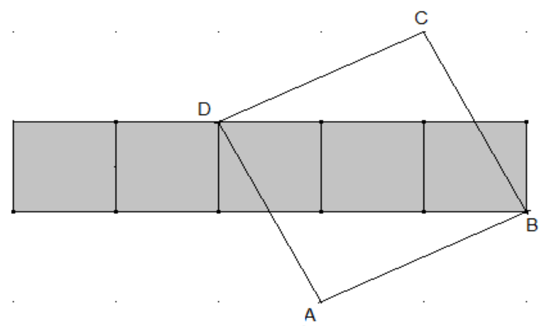
b) Der Zackenwinkel α eines n,k-Sterns ist $\frac{180°(n-2k)}{n}$. Dieser ist doppelt so groß wie sein Mittelpunktswinkel $\frac{360°}{n}$. Dann ist $\frac{180°(n-2k)}{n}=2\cdot\frac{360°}{n}$ und daher (1) n=4+2k. Der Zackenwinkel eines $\frac{n}{2}$,j-Sterns ist $\frac{2\cdot 180°(\frac{n}{2}-2j)}{n}$. Dies soll der Mittelpunktswinkel eines n,k-Sterns sein, also $\frac{2\cdot 180°(\frac{n}{2}-2j)}{n}=\frac{360°}{n}$. Folglich ist (2) $\frac{n}{2}$ =1+2j. (1) in (2) eingesetzt, ergibt 1+k=2j.

3. Flächengleichheit/Puzzles

Zwei Flächenmaße lassen sich besonders gut als gleichgroß erkennen, wenn man beide Flächen in paarweise kongruente, überschneidungs-freie Teilflächen zerlegen kann. Die angegebenen Lösungen enthalten oft nur Plausibilitäten. Exakte mathematische Beweise würden den Nachweis der Kongruenz entsprechender Teilflächen erfordern, auf den aber verzichtet wird.

3.1 Quadrat mit 5 Quadraten ausgelegt

Die grau unterlegten Quadrate haben die Seitenlange 1 LE. Sie sind also Flächeneinheiten (FE).

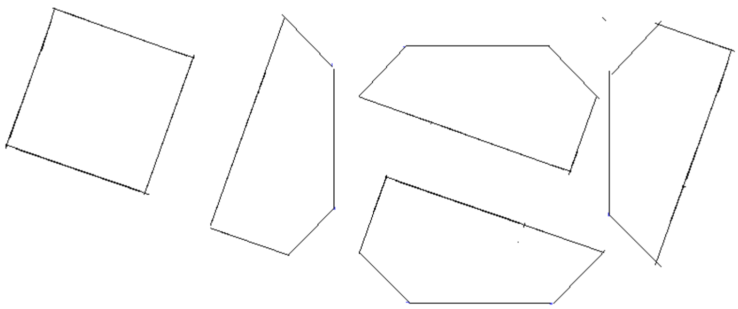


a) Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes von Pythagoras: Das Quadrat ABCD ist flächen-gleich zur grau unter-legten Gesamtfläche.

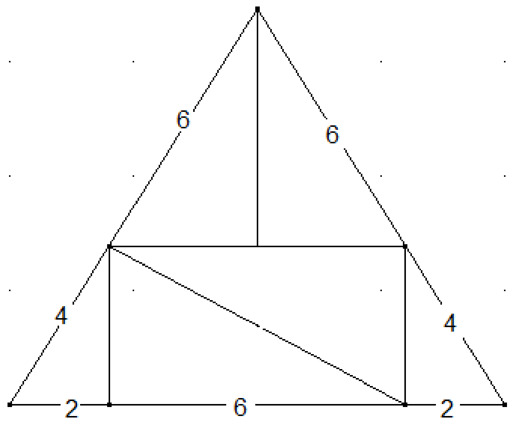
b) Zerschneiden Sie vier der grau unterlegten Quadrate mit je einem geraden Schnitt so, dass das Quadrat ABCD mit den Teilstücken ausgelegt werden kann.

3.2 Achteck und Quadrat

Aus den fünf Teilen soll wahlweise ein regelmäßiges Achteck oder ein Quadrat zusammengelegt werden.



3.3 Gleichseitige Dreiecke

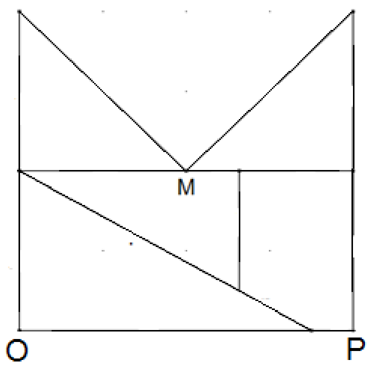


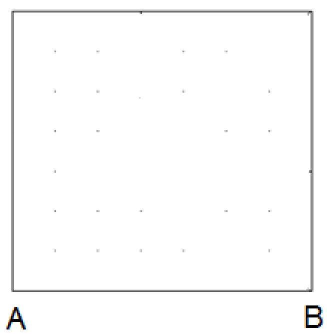
Ein gleichseitiges Dreieck wird in 6 Teile zerschnitten, wie in der Abbildung dargestellt.

a) Setzen Sie unter Verwendung aller sechs Teile 3 verschiedene gleichseitige Dreiecke zusammen. Welchen Flächenanteil am gesamten Dreieck hat jedes dieser zusammengesetzten gleichseitigen Dreiecke?

b) Setzen Sie aus diesen 6 Teilen unter Verwendung aller sechs Teile 2 verschiedene gleichseitige Dreiecke zusammen. Welchen Flächenanteil am gesamten Dreieck hat jedes dieser zusammengesetzten gleichseitigen Dreiecke?

3.4 Schattenriss einer Bischofsmütze





Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 8 wird ein Viertel seiner Fläche herausgeschnitten. Die Schnittlinien verlaufen von zwei benachbarten Eckpunkten zum Diagonalenschnittpunkt M (linke Skizze, Schattenriss einer Bischofsmütze). Die verbliebene Fläche wird in fünf Stücke –

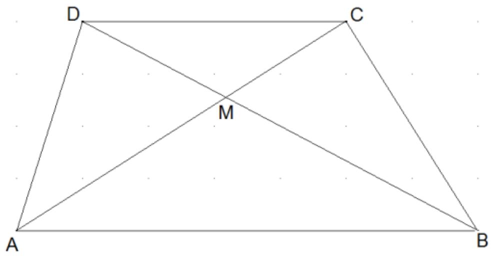
wie dargestellt – zerschnitten. Damit soll das Quadrat ausgelegt werden.

a) Führen Sie die Auslegung durch.

b) Wie lang ist eine Seite AB des Quadrats?

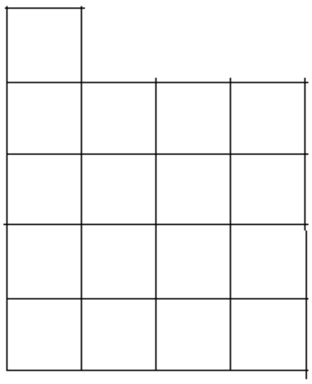
3.5 Gleicher Flächeninhalt?

Im Trapez ABCD ist M der Diagonalenschnittpunkt. Sind die Dreiecke MBC und AMD flächengleich?



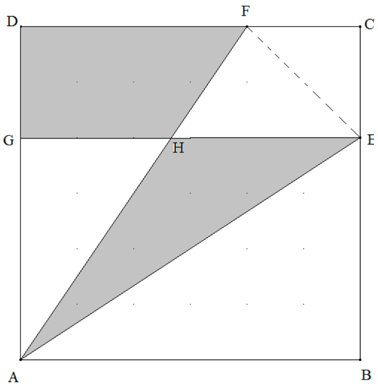
3.6 Teppichfliesen

Ein 17 m² großer quadratischer Raum soll mit 1m x1m-Teppichfliesen ausgelegt werden, von denen weniger als die Hälfte mit je einem geraden Schnitt zerteilt werden dürfen. Wie ist dies möglich? Tipp: Legen Sie den Grundriss des Raumes geschickt auf nebenstehendes Raster.



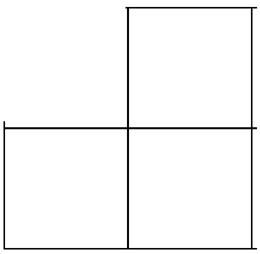
3.7 Dreieck und Trapez

Im Quadrat ABCD gilt $|\overline{EC}| = |\overline{CF}|$ (siehe Abbildung). Die Parallele zu AB durch E schneidet AF in H und AD in G.



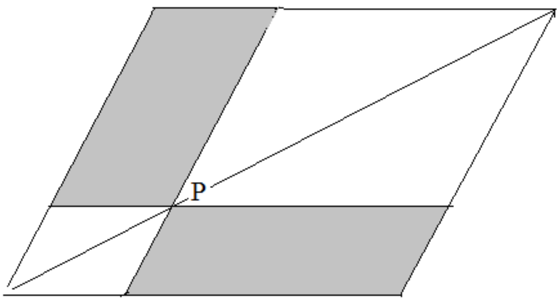
Zeigen Sie: Die Fläche des Dreiecks AEH ist gleich der Fläche des Trapezes GHFD. Tipp: AECF ist ein Drachenviereck.

3.8 L-Trominos



Ein L-förmiger Spielstein, der drei Felder eines Schachbrettes abdeckt, soll L-Tromino heißen. Zeigen Sie: Lässt man ein beliebiges Feld eines Schachbrettes offen, kann der Rest mit L-Trominos bedeckt werden.

3.9 Parallelogramme



Gegeben seien ein Parallelogramm und eine seiner Diagonalen. P sei ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen. Durch P wird je eine Parallele zu jeder Parallelogrammseite gezogen. Zeigen Sie: Die grau unterlegten Parallelogramme sind flächengleich.

3.10 Regelmäßige Sechsecke

a) Gegeben sind vier gleichgroße regelmäßige Sechsecke, aus denen Puzzleteile für das Auslegen eines regelmäßigen

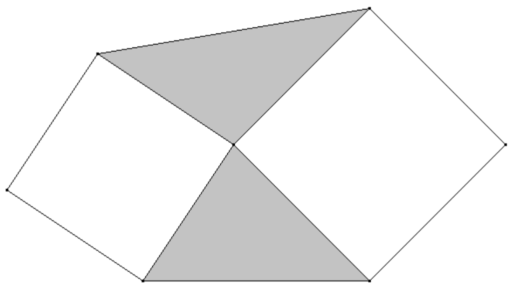
Sechsecks mit vierfachem Flächeninhalt hergestellt werden sollen. Wie viele Schnitte sind mindestens notwendig?

b) Gegeben sind drei gleichgroße regelmäßige Sechsecke aus denen Puzzleteile für das Auslegen eines regelmäßigen Sechsecks mit dreifachem Flächeninhalt hergestellt werden sollen. Eins soll ganz bleiben, eins entlang seiner Diagonalen zerschnitten werden. Wie muss das dritte zerlegt werden?

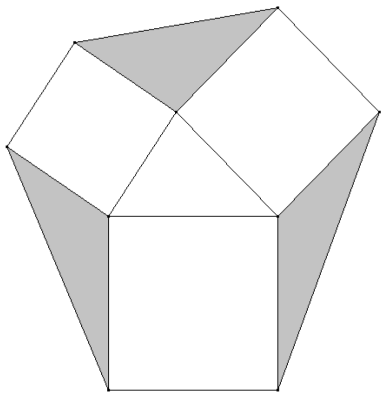
c) Gegeben sind drei gleichgroße regelmäßige Sechsecke aus denen Puzzleteile für das Auslegen eines regelmäßigen Sechsecks mit dreifachem Flächeninhalt hergestellt werden sollen. Jedes der drei kleineren Sechsecke soll auf die gleiche Weise zerschnitten werden.

3.11 Dreiecke zwischen Quadraten

a) Zwei Quadrate unterschiedlicher Größe haben eine Ecke gemeinsam. Sonst ist die Lage zueinander beliebig. Die gemeinsame Ecke ist gleichzeitig Eckpunkt zweier Dreiecke, welche die Zwischenräume zwischen den Quadraten ausfüllen (in der Abbildung grau unterlegt). Zeigen Sie: Die grauen Dreiecke sind flächengleich.

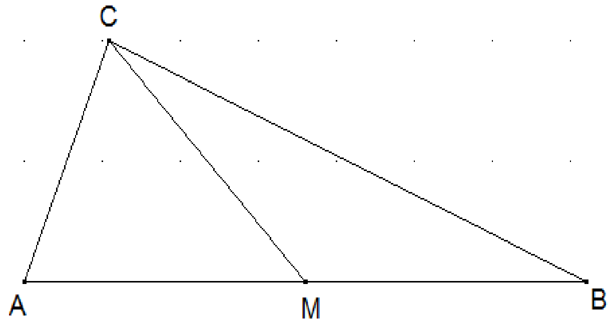


b) Die Quadrate über den Seiten eines beliebigen Dreiecks werden so ergänzt, dass ihre Zwischenräume von Dreiecken aufgefüllt werden (in der Abbildung grau unterlegt). Zeigen Sie, dass alle grauen Dreiecke flächengleich sind.



3.12 Zerlegung eines Dreiecks

Gegeben sei das Dreieck ABC, und M sei der Mittelpunkt von AB. Zerlegen Sie AMC mit möglichst wenigen geraden Schnitten so, dass MBC aus den Teilstücken von AMC zusammengesetzt werden kann.



3.13 Dreieck mit ähnlichen Dreiecken ausgelegt

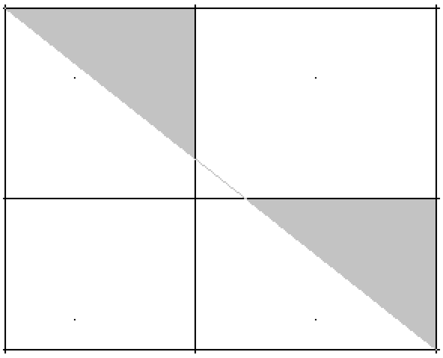
Gegeben ist ein Dreieck ABC. In wie viele zu ABC ähnliche Dreiecke kann man folgende besonderen Dreiecke zerschneiden (gesucht sind jeweils die drei kleinsten Stückzahlen)?

a) ein beliebiges Dreieck ABC.

b) ein rechtwinkliges Dreieck ABC,

c) das gleichschenklig-stumpfwinklige Dreieck ABC mit den Winkeln 30°, 30° und 120°.

3.14 Quadrat und Rechteck

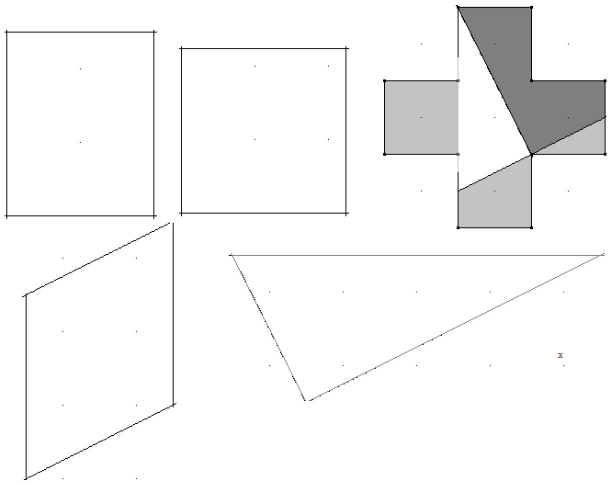


a) Konstruieren Sie ein Quadrat mit der Seitenlänge c und ein dazu flächengleiches Rechteck mit der Seitenlänge a. (siehe Abbildung). Die andere Seitenlänge des Rechtecks sei dann b.

   Zeigen Sie, dass die durch eine Diagonale im Rechteck mit den Seitenlängen c+a und c+b abgetrennten grauen Dreiecke in der Abbildung kongruent sind.

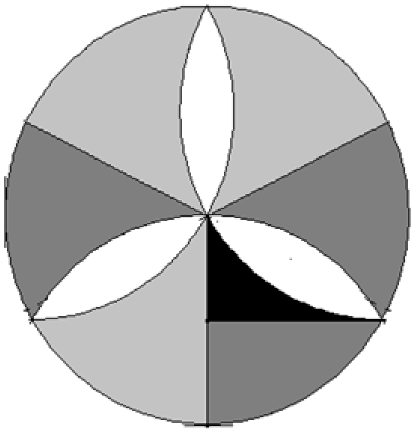
b) Zerlegen sie das Quadrat durch gerade Schnitte in möglichst wenige Teilflächen, mit denen sich das Rechteck parkettieren lässt.

3.15 Die Kreuzform oben rechts ist in fünf Teile zerlegt. Parkettieren Sie die anderen vier Formen jeweils mit diesen fünf Teilen.



3.16 Kreisteile

Die hellgrauen, dunkelgrauen und schwarzen Flächen des Kreises mit dem Radius r=2 sollen zu einem Rechteck mit der Länge 6 und der Breite √3 zusammengefügt werden.



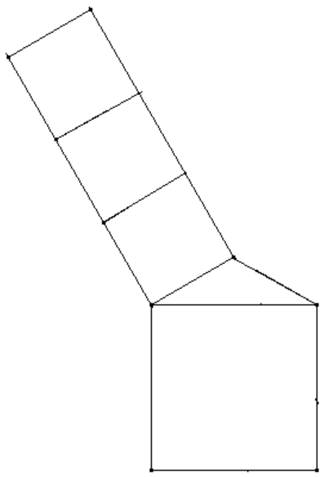
3.17 Zerlegen Sie mit zwei geraden Schnitten ein regelmäßiges Sechseck so in drei flächengleiche Teile, dass beide Schnitte

a) durch den gleichen Eckpunkt gehen.

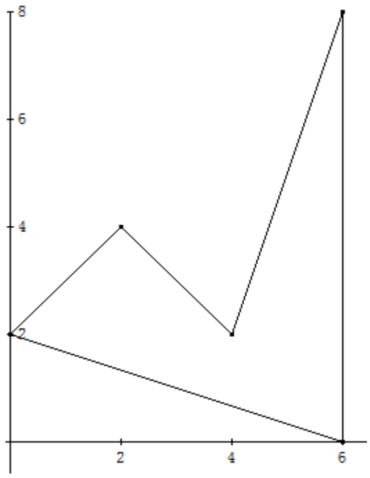
b) durch die gleiche Seitenmitte gehen.

3.18 Zerlegen Sie mit möglichst wenigen Schnitten ein Dreieck mit den Seitenverhältnissen 6:8:13 in ein flächengleiches Rechteck dessen eine Seite auf der gleichen Geraden liegt, wie die kürzeste Dreiecksseite.

3.19 Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge a habe den Winkel der Größe 120° zwischen den Schenkeln. Zeigen Sie: Das Quadrat über der Basis ist flächengleich zu 3 Quadraten über dem Schenkel.



3.20 Geschlossener Polygonzug

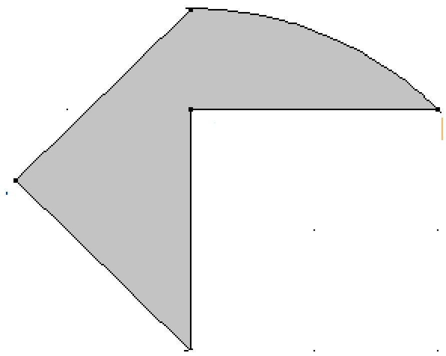


Der Polygonzug ABCDEA mit A(0|2), B(2|4), C(4|2),D(6|8) und E(6|0) umschließt eine Fläche F.

a) Wie groß ist die Fläche F?

b) Zeigen Sie durch eine Skizze: Vier kongruente Flächenstücke F lassen sich zu einem Quadrat zusammensetzen. Kontrollieren Sie so das Ergebnis unter a).

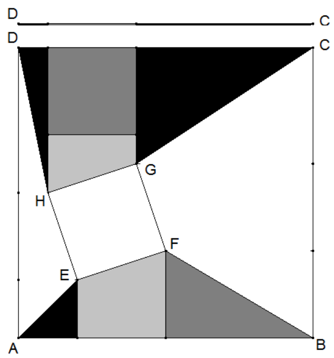
3.21 Acht gleiche Teile



Welchen Flächeninhalt hat nebenstehende Figur, wenn ihre geraden Begrenzungslinien die Länge 1 haben und die Fünfte Begrenzungslinie der Bogen eines Achtelkreises ist?

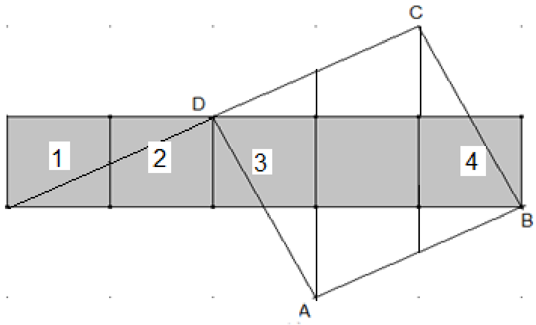
3.22 Quadrat im Quadrat

Im Innern des Quadrates ABCD liegt an irgendeiner Stelle das Quadrat EFGH. Zeigen Sie: Mit den grau und schwarz unterlegten Teilen lassen sich die Vierecke AEHD und FBCG vollständig bedecken.

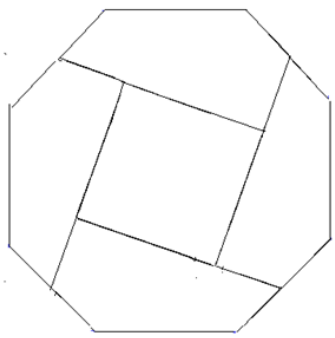


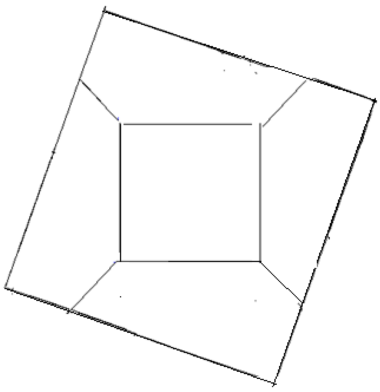
Lösungen

3.1

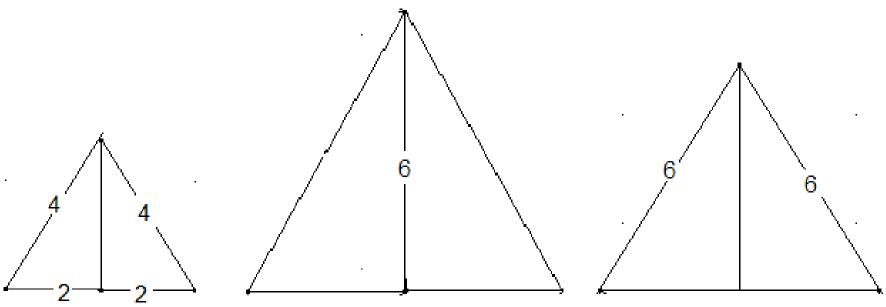


3.2





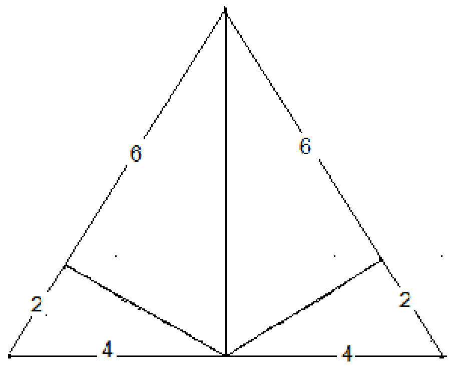
3.3 a)

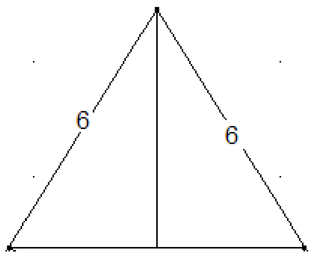


$\frac{4}{25}$ $\frac{12}{25}$ $\frac{9}{25}$

Flächenanteile vom Ausgangsdreieck.

3.3 b)

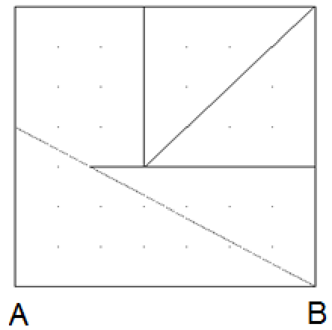




$\frac{16}{25}$ $\frac{9}{25}$

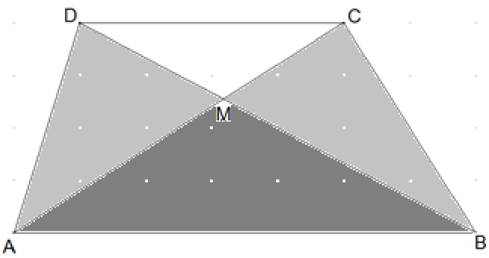
Flächenanteile vom Ausgangsdreieck.

3.4 a)



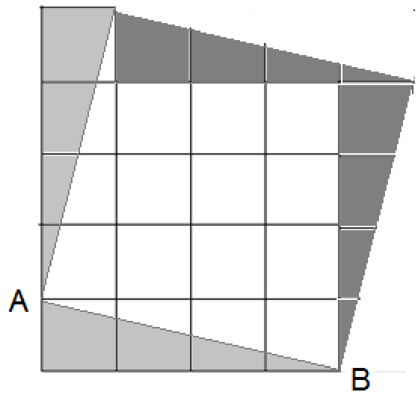
b) Die Seitenlänge AB ist $\sqrt{64-16}=\sqrt{48}$

3.5 Die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ABD sind gleich, denn sie haben die gleiche Grundseite und Höhe. Folglich gilt $F_{ABC}=F_{ABD}$. Hier subtrahieren wir auf beiden Seiten die Fläche des Dreiecks ABM:

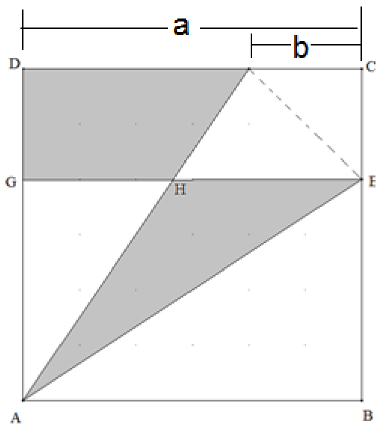


$F_{ABC} – F_{ABM} = F_{ABD} – F_{ABM}$. Dann verbleiben links F_{AMD} und rechts F_{MBC}.

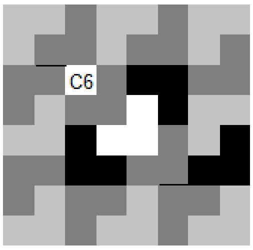
3.6 Jede Seite des quadratischen Zimmers hat das Maß √17. Nach Pythagoras ist die Länge AB gleich √17. Die hellgrauen Teile wurden abgeschnitten und als dunkelgraue eingefügt.

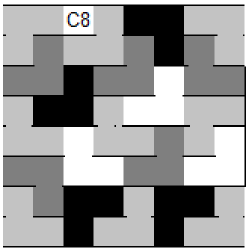


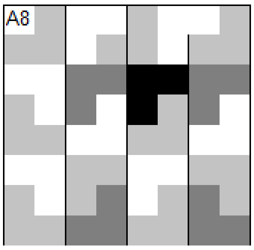
3.7 Wir nennen AB=BC=CD=CA=a und CE=CF=b. Dann sind die Diagonalenlängen im Drachenviereck AECF a·√2 und b·√2. Folglich ist der Flächeninhalt des Drachenvierecks AECF a·b und des Rechtecks GECD ebenfalls a·b. Schneidet man sowohl vom Drachenviereck AECF als auch von Rechteck GECD die Fläche des Trapezes HECF ab, bleiben jeweils die grau unterlegten Flächen übrig.



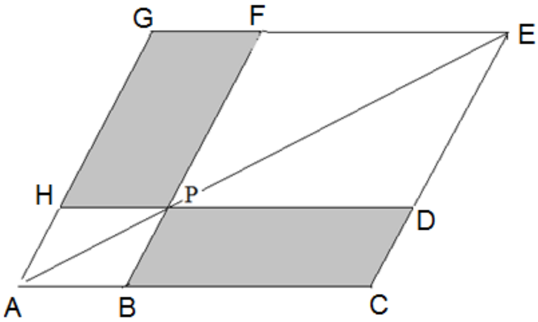
3.8 Wenn man die L-Trominos so anordnen kann, dass die Felder C6, C8 bzw. A8 freibleiben, lassen sich durch Drehung des Quadrates, das aus dem freien Feld und einem Tromino besteht sowie Drehung oder Spiegelung des gesamten Brettes alle Felder als freibleibend darstellen.





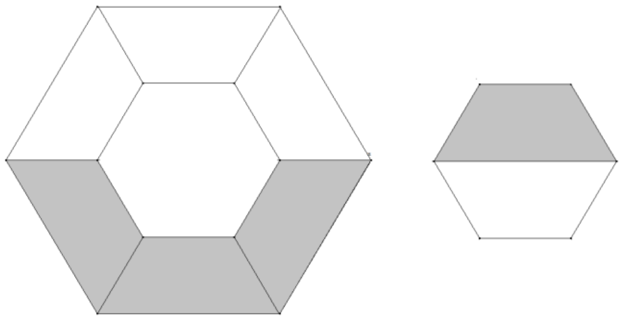


3.9 Die Parallelogramme ABPH, PDEF und ACEG werden durch die Diagonale AE in je zwei gleichgroße Flächenstücke zerlegt.

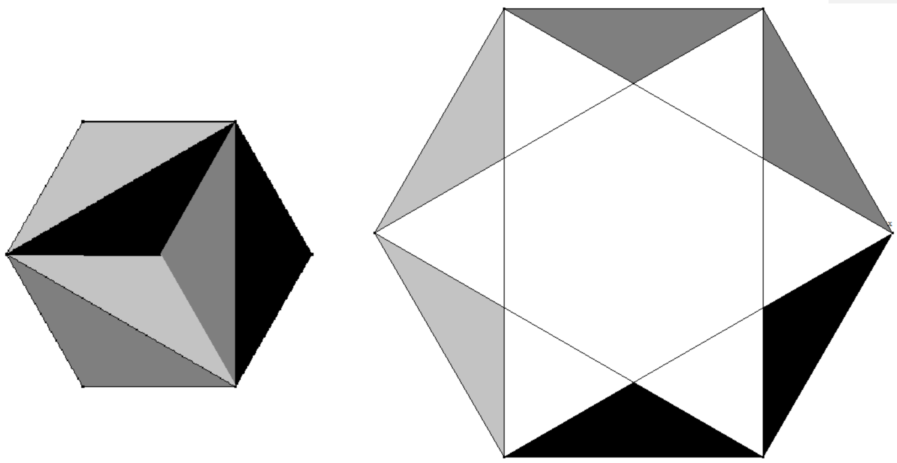


Entnimmt man dem Dreieck AEG die weiß unterlegten Flächenstücke und ebenso dem Dreieck ACE, bleiben die grau unterlegten Parallelogramme übrig. HPFG und BCDP sind also flächengleich.

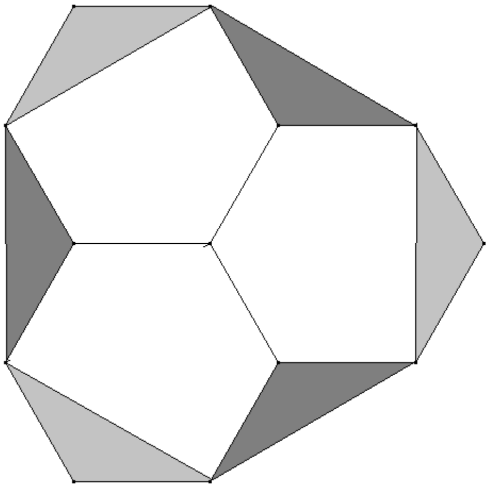
3.10 a) Drei der vier kleineren Sechsecke werden entlang einer Diagonalen zerschnitten (im Bild rechts). Das vierte bleibt ganz.



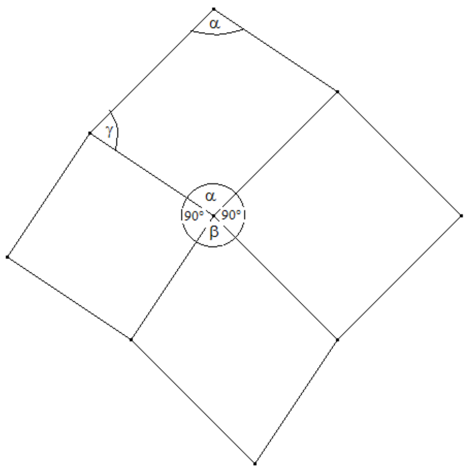
3.10 b) Hier die Zerlegung des dritten Sechsecks und die Auslegung des großen Sechseck mit den entstandenen Teilen:



3.10 c) Die hellgrauen Dreiecke werden von den drei kleinen Sechsecken abgeschnitten und als dunkelgraue eingefügt:

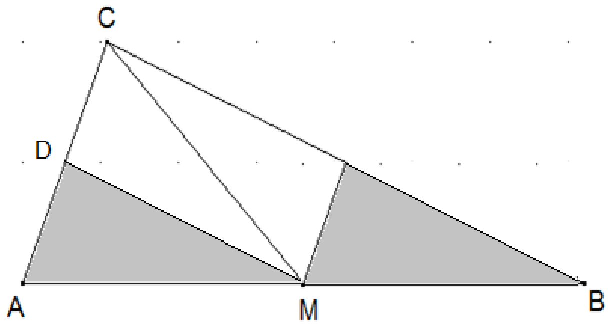


3.11 Zu a) Ergänze die Dreiecke zu Parallelogrammen. Dann ist (1) $\gamma+\alpha=180°$ und $\alpha+90°+\beta+90°=360°$ also (2) $\alpha+\beta=180°$. Wegen (1) und (2) ist $\beta=\gamma$. Parallelogramme sind kongruent, wenn die in zwei unterschiedlichen Seitenlängen und der Größe eines Winkels übereinstimmen. Die grauen Dreiecke der Aufgabe sind Hälften von kongruenten Parallelogrammen und daher flächengleich.

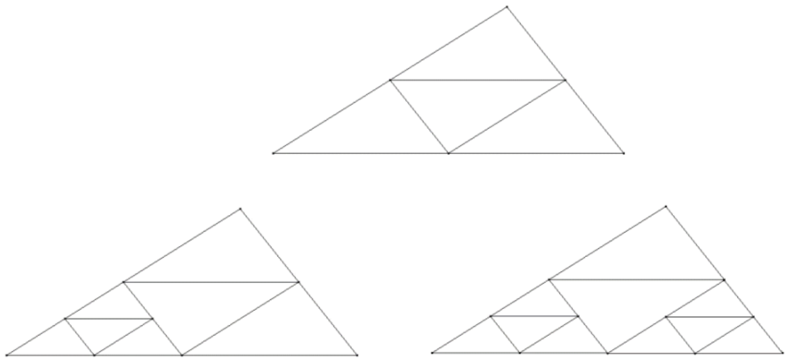


Zu b) Jedes der grauen Dreiecke ist (nach Aufgabe a) flächengleich zum gleichen Dreieck (in der Mitte). Daher sind alle grauen Dreiecke flächengleich.

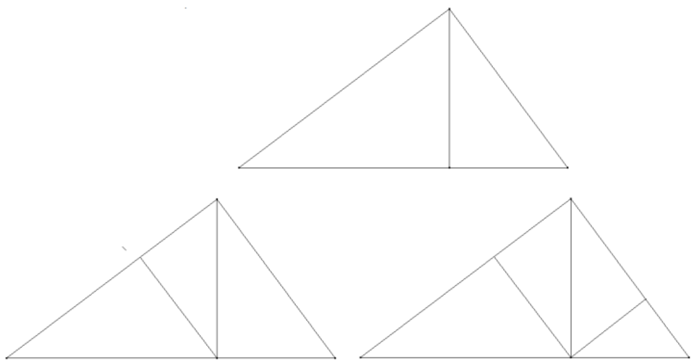
3.12 Es genügt ein einziger Schnitt DM parallel zu CB durch M.



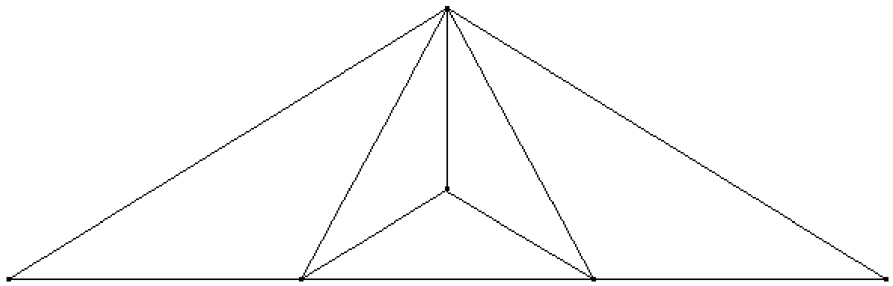
3.13 a) 4,7, 10, …



3.13 b) 2, 3, 4, …

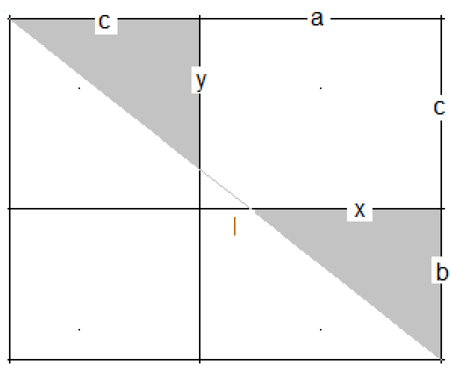


3.13 c) Zunächst kann man auch dieses Dreieck (wie jedes beliebige Dreieck) in minimal 4 ähnliche Dreiecke teilen. Dann aber gibt es auch eine Aufteilung in 5 ähnliche Dreiecke:

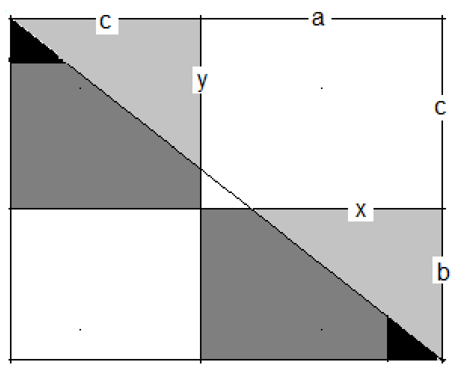


Aus a) übernehmen wir 4 und 7 und ergänzen die 5. Jede natürliche Anzahl (oberhalb 3) ähnlicher Teildreiecke ist möglich mit Ausnahme der Anzahl 6.

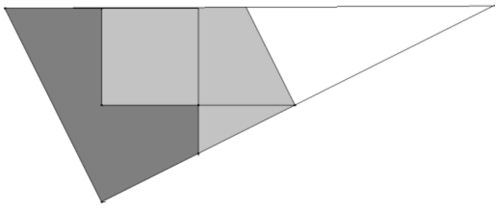
3.14 a) Es gilt nach dem 2. Strahlensatz $\frac{c}{y} = \frac{c+a}{c+b}$ umgeformt zu $c^2+c\cdot b=y\cdot(c+a)$. Dann ist wegen $c^2=a\cdot b$: $a\cdot b+c\cdot b=y\cdot(c+a)$. Nach Ausklammern von b und Dividieren durch c+a ist b=y. Die grauen Dreiecke stimmen in allen Winkelgrößen und der Gegenseite des kleinsten Winkels überein. Daher sind sie kongruent.

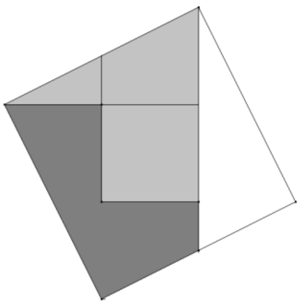


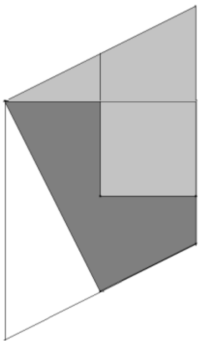
3.14 b)

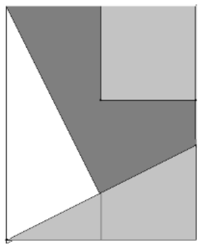


3.15

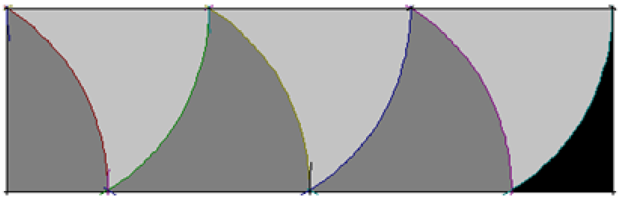






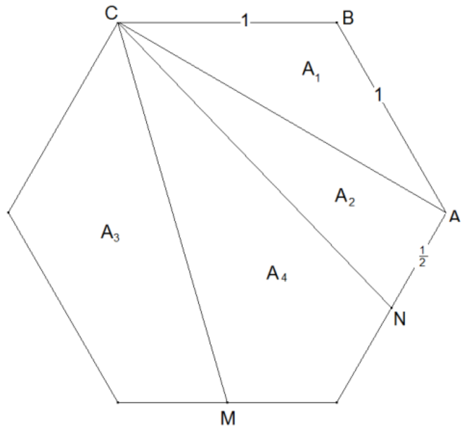


3.16

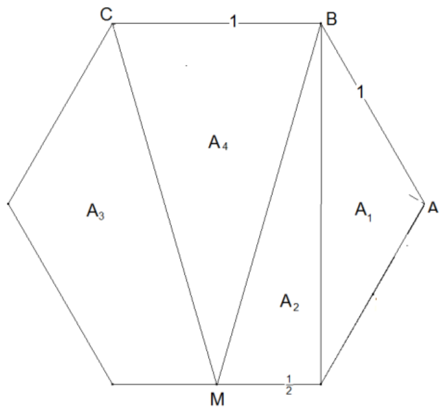


3.17 a) Die Schnitte gehen durch die Ecke C des Sechsecks sowie durch zwei Seitenmitten M und N (Abbildung auf der nächsten Seite). Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 1 hat den Flächeninhalt F=$\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Die Fläche A_1 berechnet sich am einfachsten als

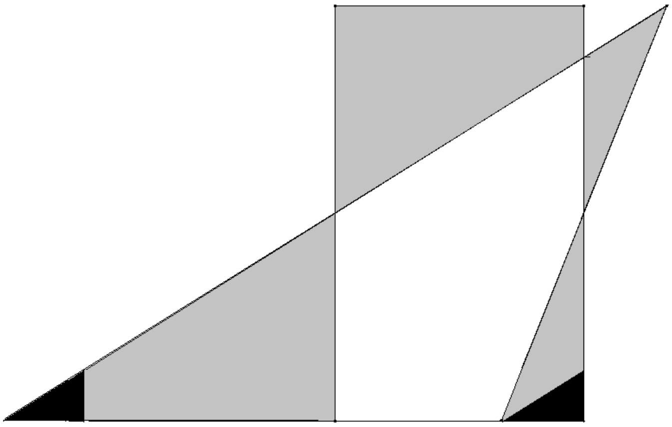
$A_1=\frac{\sin(120°)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. A_2 ist die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen √3 und $\frac{1}{2}$ sodass $A_2=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Aus Symmetriegründen ist dann $A_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $A_4=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



b) Die Schnitte gehen durch die Seitenmitte M sowie durch die Eckpunkte des Sechsecks C und B (siehe Abbildung). Die Flächen berechnen sich wie unter a).

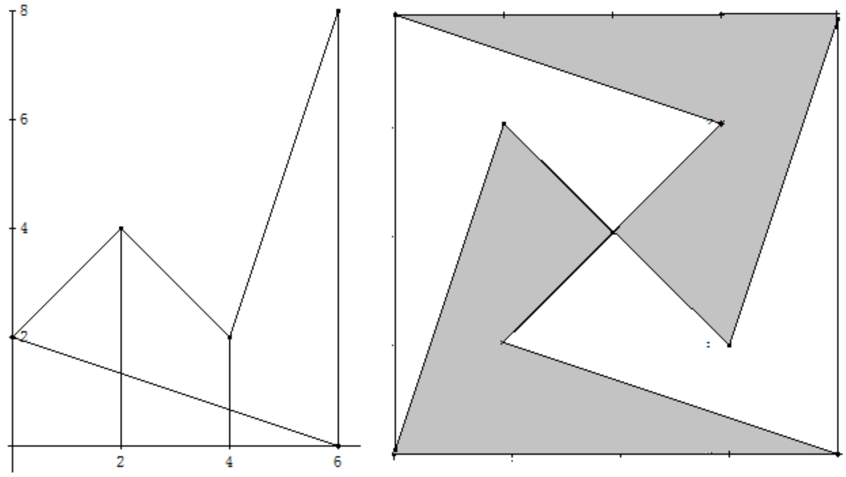


3.18 Senkrechte Seiten des Rechtecks durch zwei Seitenmitten.



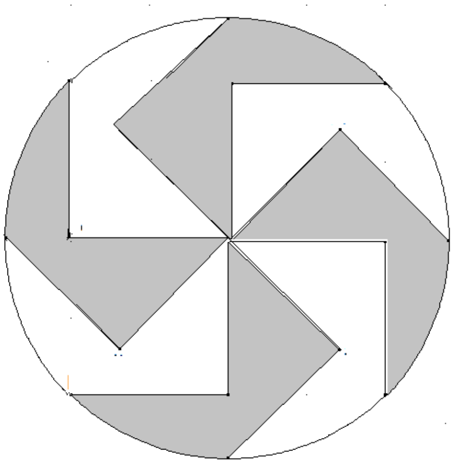
3.19 Die Länge der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Seitenlänge a und dem Winkel der Größe 120° gegenüber der Basis ist $a\sqrt{3}$. Dann ist die Fläche des Quadrats über der Basis $3a^2$ bzw. $a \cdot 3a$.

3.20 a) Fläche der Trapeze vermindert um die Fläche des Dreiecks (linkes Bild): (2+4)+(4+2)+(2+8) – 6 =16.

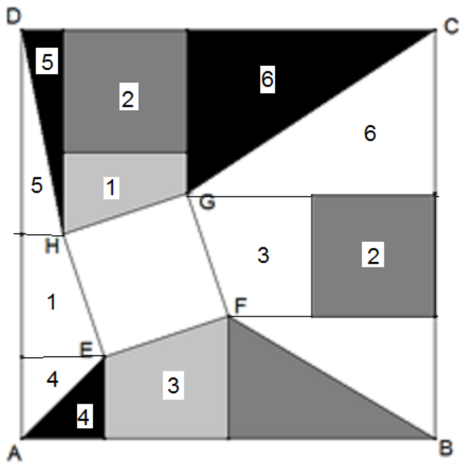


b)(rechtes Bild). Flächenkontrolle 4·16=8·8.

3.21 Der Radius des aus 8 gleichen Teilen zusammengesetzten Kreises ist Diagonale im Einheitsquadrat mit der Länge $\sqrt{2}$. Ein einzelnes Teil hat dann den Flächeninhalt $\frac{\pi}{8}\sqrt{2}$.



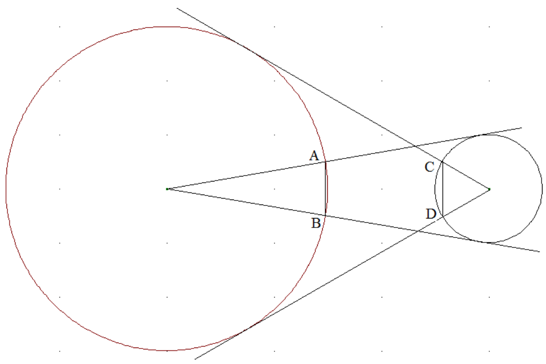
3.22 Teile mit gleicher Ziffer sind kongruent.



4. Beweisen und Rechnen mit Kreisen

4.1 Gleichlange Sehnen

Gegeben sind ein großer und ein kleiner Kreis, die sich nicht berühren oder überschneiden. Vom Mittelpunkt des großen Kreises werden die Tangenten an den kleinen Kreis gelegt. Sie schneiden den großen Kreis in A und B. Vom Mittelpunkt des kleinen Kreises werden die Tangenten an den großen Kreis gelegt. Sie schneiden den kleinen Kreis in C und D.



Beweisen Sie: Die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind gleichlang.

4.2 Art des Vierecks?

Zwei Kreise K_1 und K_2 berühren sich in B. Eine Gerade g_1 durch B schneidet K_1 außer in B auch in P und K_2 außer in B auch in R. Eine andere Gerade g_2 durch B schneidet K_1 in Q und K_2 in S. Welcher Art Viereck ist PQRS?

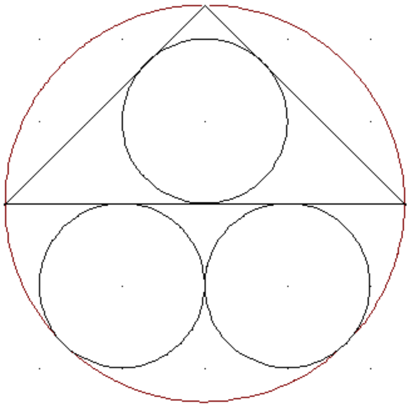
4.3 Inkreis und Umkreis von Vierecken

a) Ein Drachen der einen Umkreis hat, soll „Sehnendrachen“ heißen. Welche Gemeinsamkeit haben alle Sehnendrachen?

b) Ein Trapez, das einen Inkreis hat soll „Tangententrapez“ heißen. Welche Gemeinsamkeit haben alle Tangententrapeze?

c) Gibt es einen Drachen und ein Trapez mit gemeinsamem Um- und Inkreis?

4.4 Kreise mit gleichen Radien

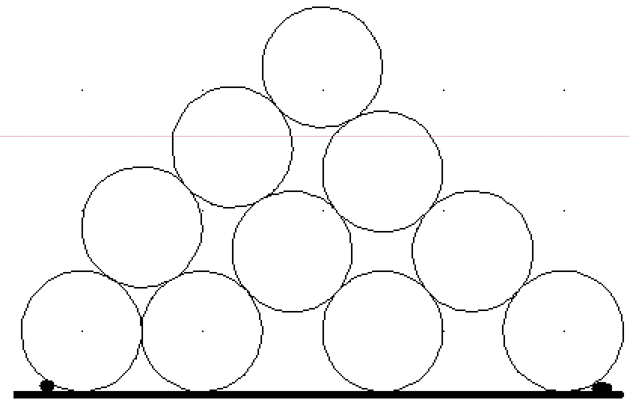


Ein Kreis K_1 wird von seinem Durchmesser in zwei Halbkreise geteilt. In den einen Halbkreis wird ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem Durchmesser von K_1 als Basis samt Inkreis K_2 des Dreiecks gezeichnet. In den anderen Halbkreis werden zwei gleichgroße Kreise K_3 und K_4 gezeichnet, die sich untereinander und zusätzlich den Durchmesser und den Halbkreisbogen von K_1 berühren (siehe Abbildung). Zeigen Sie, dass K_2 und K_3 den gleichen Radius haben.

4.5 Verlorener Mittelpunkt eines Kreises

Wie kann man nur mit Hilfe einer Postkarte und einem Stift den Mittelpunkt eines Bierdeckels finden?

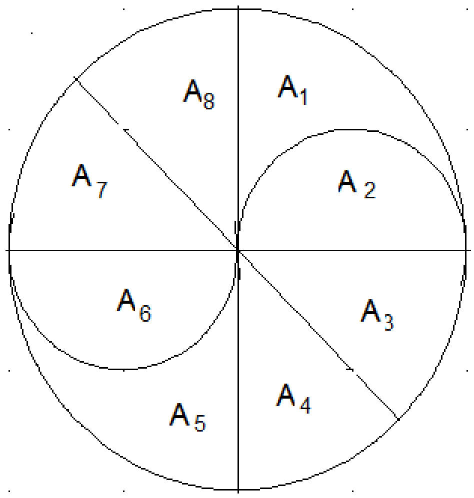
4.6 Gestapelte Rohre



Ein Stapel von Rohren wurde schon in der untersten ebenen Lage nicht ordentlich begonnen. Begründen Sie, dass das oberste Rohr genau mittig zwischen dem rechten und dem linken untersten Rohr liegt.

Kommentiert [Schroeder1]:

4.7 Kreisteilung



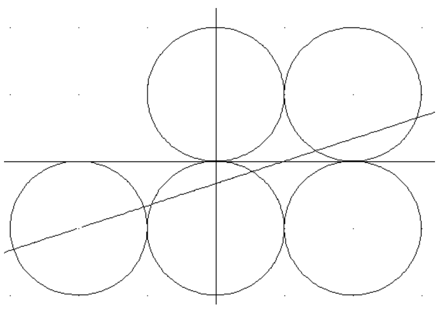
A_7, A_8, A_3 und A_4 sind Achtelkreise zum Radius r_1. A_2 und A_6 sind Halbkreise zum Radius $r_2 = \frac{1}{2}r_1$. Zeigen Sie A_1=A_2=…=A_7=A_8.

4.8 Lote auf einen Durchmesser des Umkreises

Auf einen beliebigen Durchmesser des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks werden die Lote von den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks gefällt. Zeigen Sie: Die beiden kürzeren Lote sind zusammen so lang, wie das längere Lot.

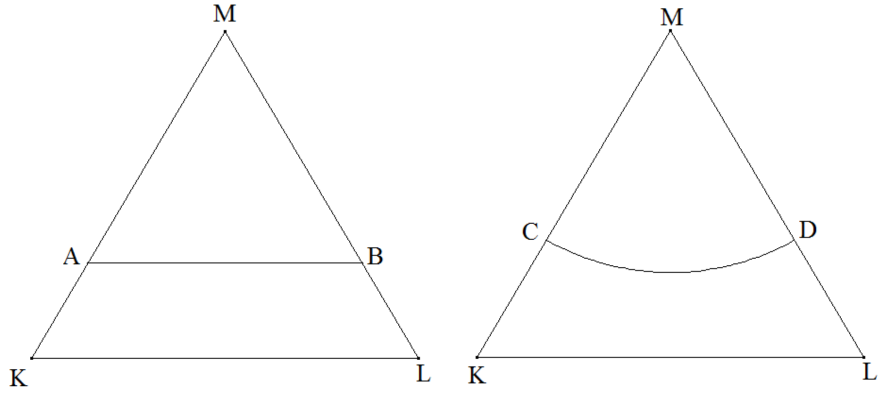
4.9 Fünf Kreise

Gegeben sind 5 gleichgroße Kreise im Koordinatensystem. Alle berühren die x-Achse, zwei haben ihren Mittelpunkt auf der y-Achse (siehe Abbildung). Welche Steigung hat eine Gerade die die Gesamtfläche der 5 Kreise halbiert?

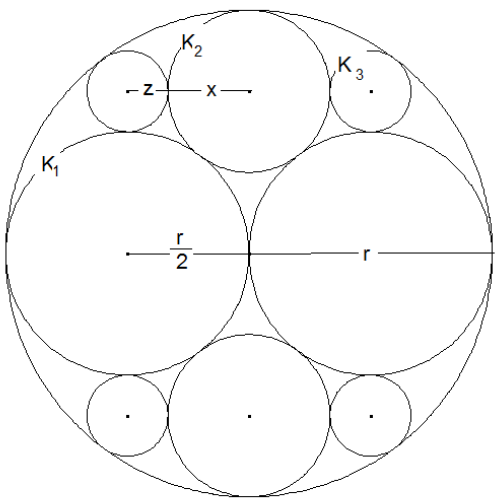


4.10 Halbierung eines gleichseitigen Dreiecks

Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks KLM wird einerseits vom Bogen $\widehat{CD}$ (auf Kreis um M) und andererseits von der zu KL parallelen Strecke $\overline{AB}$ halbiert. Was ist länger $\overline{AB}$ oder $\widehat{CD}$?



4.11 Kleine Kreise im großen



Einem Kreis K mit dem Radius r werden zwei kleinere K_1 mit dem Radius $\frac{r}{2}$ einbeschrieben, die sich sowohl untereinander als auch K berühren. Dann werden dem Objekt aus drei Kreisen zwei Kreise K_2 mit dem Radius x einbeschrieben, die beide Kreise K_1 und auch K berühren. Und schließlich werden dem Objekt aus fünf Kreisen vier noch kleine K_3 mit dem Radius z einbeschrieben, die K, K_1 und K_2 berühren. Welchen Anteil des Kreises K bedecken die vier Kreise K_3?

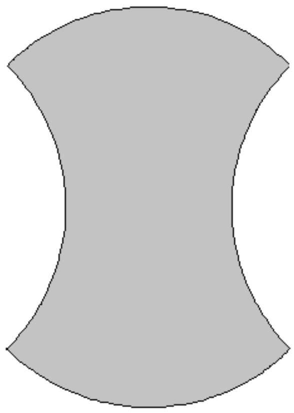
4.12 Inkreis, Ankreis, Umkreis

a) Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreiecke mit seinen sogenannten Ankreisen.

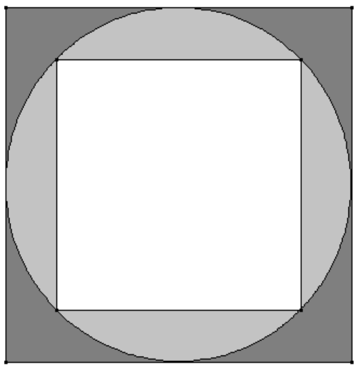
b) Begründen Sie, dass die Radien von Inkreis, Umkreis und Ankreis eines gleichseitigen Dreiecks das Längenverhältnis 1:2:3 haben.

4.13 Angebissener Apfel

Der Rand nebenstehender Figur besteht aus vier Viertelkreisen mit dem gleichen Radius r. Welchen Flächeninhalt hat die Figur in Abhängigkeit von r?

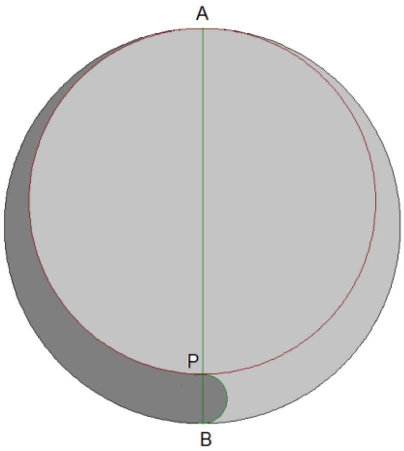


4.14 Flächenverhältnis



Einem Quadrat wird ein größtmöglicher Kreis einbeschrieben und dem Kreis wieder ein größtmögliches Quadrat (siehe Abbildung). In welchem Flächenverhältnis stehen die hellgrau unterlegten zu den dunkelgrau unterlegten Flächen?

4.15 Flächenteilung



Auf dem Durchmesser AB eines Kreises K liegt ein Punkt P. Die Halbkreise über AP und über BP liegen auf verschiedenen Seiten des Durchmessers. Die S-Linie der beiden Halbkreise zerschneidet den Kreis K in zwei Teilflächen. Welches Flächenverhältnis haben die beiden Teile, wenn

a) P die Strecke AB im Verhältnis 1:4 teilt?

b) P die Strecke AB im Verhältnis 1:m teilt?

4.16 Ein Irrtum Malfattis

Gianfrancesco Malfatti beantwortete 1803 die Frage, wie man aus einem Dreieck drei Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche schneiden könne mit der Behauptung, dass jeder Kreis **die beiden** anderen sowie zwei Dreiecksseiten berühren müsse.

Das war ein Irrtum, wie sich durch Lösung der folgenden Aufgaben an einem **gleichseitigen** Dreieck zeigen lässt:

a) Wählen Sie drei Kreise mit gleichem Radius.

b) Wählen Sie den Inkreis und zwei weitere Kreise, von denen jeder **nur** den Inkreis und zwei Dreiecksseiten berührt.

4.17 Zwei Kreise

Zwei Kreise K_1 und K_2 mit unterschiedlichen Radien r_1 bzw. r_2 schneiden sich in P und C. Eine Gerade durch P schneidet außerdem den Kreis K_1 in A_i und den Kreis K_2 in B_i. Welche

gemeinsame Eigenschaft haben alle Dreiecke A_iB_iC?
Unterscheiden Sie zwei Fälle:

a) B_i liegt auf dem kürzeren der Bögen $\overset{\frown}{CP}$ bzw. $\overset{\frown}{PC}$ des Kreises K_2.

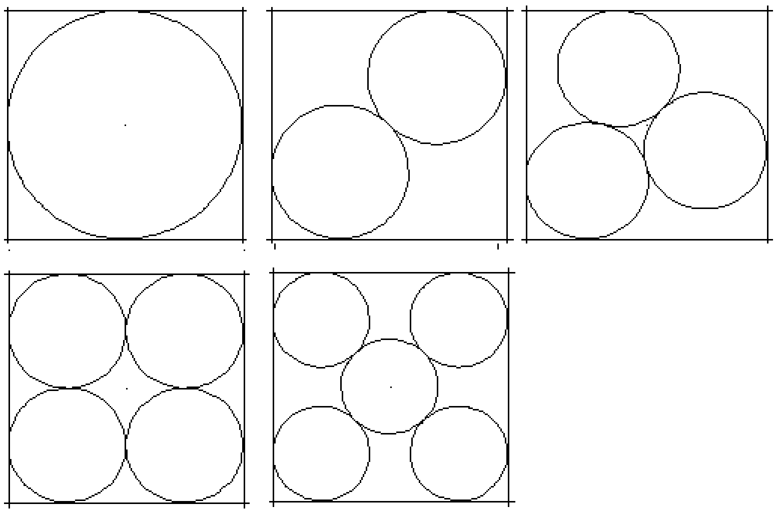
b) Sowohl B_i als auch A_i liegen jeweils auf dem längeren Bogen ihres Kreises.

4.18 Drei Kreise im Dreieck

Das Längenverhältnis der Seiten eines Dreiecks ist 9:10:7. Konstruieren Sie drei Kreise mit gleichen Radien, die einen gemeinsamen Punkt haben und jeweils zwei Seiten des Dreiecks berühren.

4.19 Kreise im Quadrat

In je einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 Längeneinheit werden n Kreise mit jeweils gleichem Radius so angeordnet, dass sie eine möglichst große Fläche des Einheitsquadrates bedecken (siehe Abbildung).



Welcher prozentuale Anteil (auf 3 Stellen hinter dem Komma genau) der Quadratfläche wird jeweils für n = 1, 2, 3, 4, 5 von den Kreisflächen bedeckt?

Hinweis zu den 3 Kreisen: Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck mit den 3 Kreismittelpunkten als Eckpunkte. Welchen kleinsten Winkel bildet eine Dreiecksseite mit einer Quadratseite?

4.20 Kreis durch Seitenmitten

a) Zeigen Sie: Die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

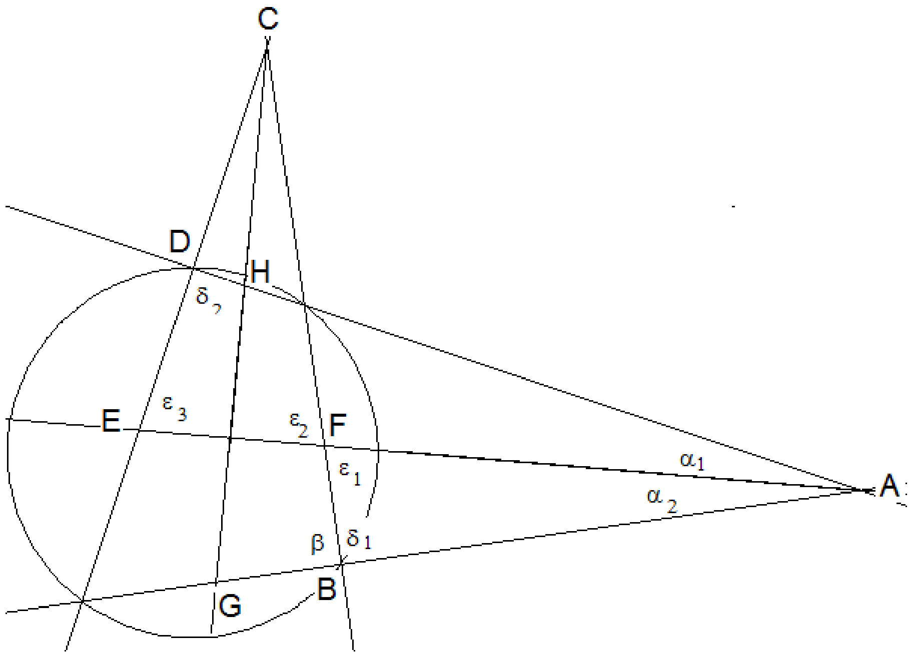
b) Zeigen Sie: Die Seitenmitten eines Vierecks, dessen Diagonalen senkrecht zueinander sind, liegen auf einem Kreis.

4.21 Ein besonderer Punkt im Dreieck

Auguste Miquel (um 1816 – 1851) hat 1838 folgenden Satz veröffentlicht: Ist *A′* irgendein Punkt auf der Seite *BC* eines Dreiecks, entsprechend *B′* auf *AC* und *C′* auf *AB*, so schneiden sich die Kreise durch *A*, *B′* und *C′*, durch *A′*, *B* und *C′* sowie durch *A′*, *B′* und *C* in genau einem Punkt.

Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Satzes: Ein Viereck ist genau dann Sehnenviereck, wenn die Größen gegenüberliegender Winkel die Summe 180° haben.

4.22 Raute im Sehnenviereck



Das Bild zeigt ein Sehnenviereck mit den Winkelhalbierenden seiner verlängerten Seiten.

a) Zeigen Sie: Die Dreiecke EAD und BAF sind ähnlich.

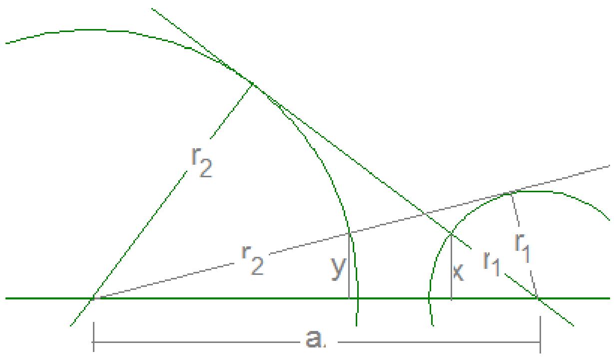
b) Zeigen Sie: Das Dreieck EFC ist gleichschenklig.

c) Begründen Sie: Das Dreieck GAH ist gleichschenklig.

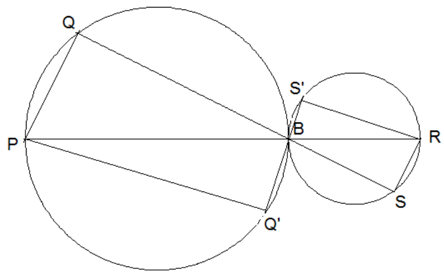
d) Begründen Sie: HEGF ist eine Raute.

Lösungen

4.1 Sei a der Abstand der Mittelpunkte**,** r_1 der Radius des kleinen Kreises und r_2 der Radius des großen Kreises. x und y seien jeweils die halben Sehnen. Dann gelten wegen der Ähnlichkeit entsprechender Dreiecke $\frac{x}{r_1} = \frac{r_2}{a}$ und $\frac{y}{r_2} = \frac{r_1}{a}$ und daher x=y=$\frac{r_1 \cdot r_2}{a}$.



4.2 Legen Sie PR zunächst durch die Mittelpunkte der beiden Kreise, Dann stimmen die Dreiecke PBQ und PSR in allen Winkelgrößen überein und sind folglich ähnlich. Die gleiche Argumentation begründet auch, dass PQ‘B und BRS‘ ähnlich sind.

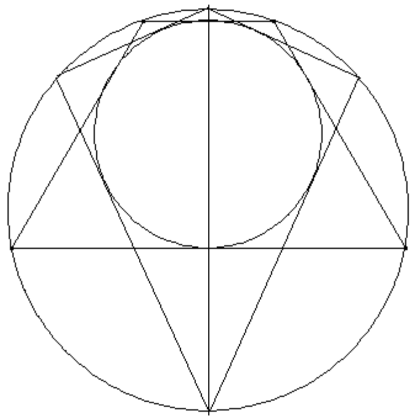


Damit sind die Vierecke PQ’BQ und BSRS‘ ähnlich. Sie sind Bild und Urbild einer zentrischen Streckung mit den Zentrum B. Dann sind QQ‘ und S‘S parallel und QQ’SS‘ ist ein Trapez. Nach Umbenennung von S‘ in R und von Q‘ in P folgt QPSR ist ein Trapez.

4.3 a) Drachen mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln sind Sehnendrachen.

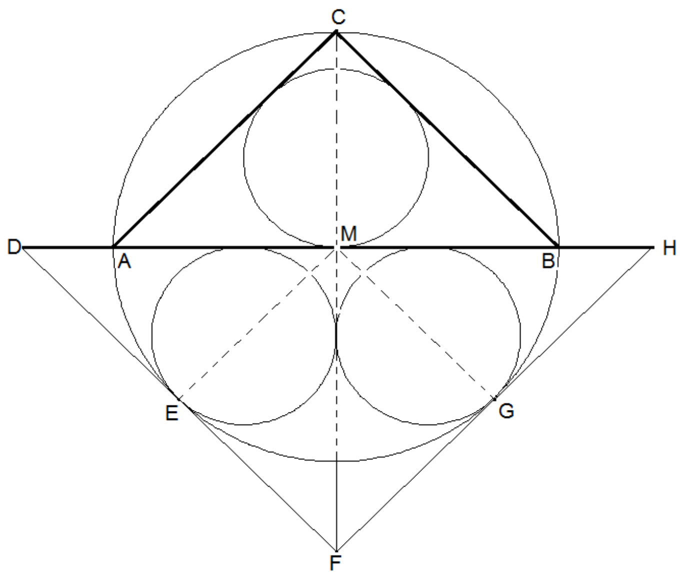
b) Symmetrische Trapeze mit dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden auf der Symmetrieachse sind Tangententrapeze.

c) Konstruieren Sie ein Trapez mit dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden auf der Symmetrieachse einschließlich Um- und Inkreis. Der Umkreis schneidet die Symmetrieachse in R und S. Die Tangenten von R und S an den Inkreis bilden einen Drachen.

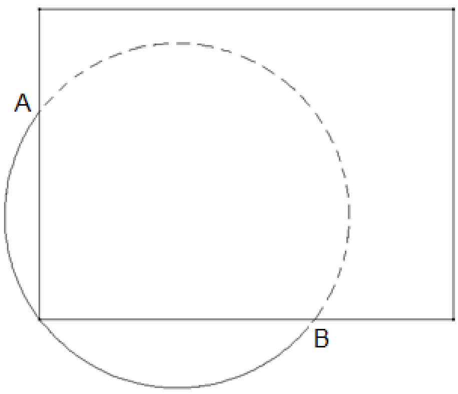


4.4

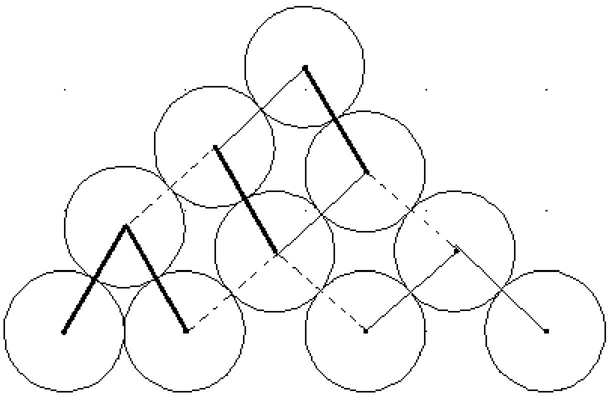
Wir ergänzen die in der Aufgabe gegebene Skizze um gemeinsame Tangenten DF bzw. FH an den kleinen und den großen Kreis. Dann sind die gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke AMC, DEM, EFM, FGM und MBC kongruent, denn sie stimmen alle in ihren Kathetenlängen überein. Dann sind auch die daraus zusammengesetzten Dreiecke ABC, CFM und MFH kongruent. Kongruente Dreiecke haben gleichgroße Inkreise.



4.5 Legen Sie die Postkarte mit einer Ecke auf den Rand des Bierdeckels. Markieren Sie auf dem Bierdeckel die Punkte A und B, an denen der Rand des Bierdeckels auf den Rand der Postkarte trifft. Dann ist AB der Durchmesser des Bierdeckels (Thaleskreis). Konstruieren Sie auf die gleiche Weise einen zweiten Durchmesser. Die Durchmesser schneiden sich im Mittelpunkt des Bierdeckels.

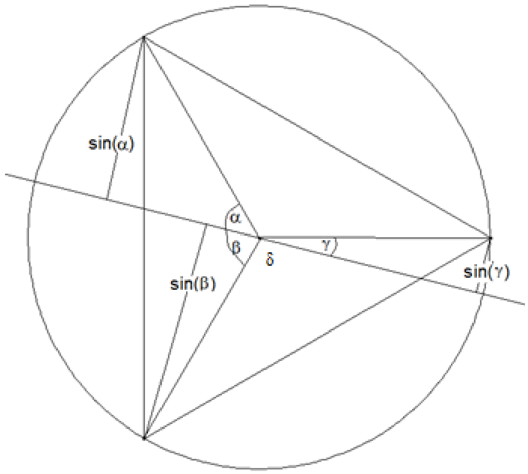


4.6 Strecken gleicher Strichstärke haben gleichlange Projektionen auf eine gemeinsame Waagerechte. Die Summe der Projektionen der drei verschieden dargestellten Strecken auf eine Waagerechte ist rechts und links gleich.

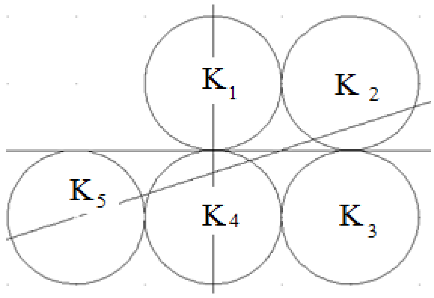


4.7 Sei r der Radius des großen Kreises, dann ist $A_1=\frac{\pi r^2}{4}-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2$, $A_2=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2$, $A_3=\frac{\pi r^2}{8}$. Demnach ist $A_1=A_2=A_3$. Für den Vergleich anderer Flächenstücke folgt Entsprechendes.

4.8 Der Umkreis habe den Radius 1. Die Radien zu den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks bilden mit einem beliebigen Durchmesser die Winkel α, β und γ. Die Lote von den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks auf den Durchmesser haben dann die Längen $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und $\sin(\gamma)$. Nun gilt: $\alpha+\beta=120°$ oder $\beta=120°-\alpha$. Außerdem gilt $\beta+\delta=180°$ und $\gamma+\delta=120°$. Dann ist $\gamma=ß-60°$. Hier β eingesetzt ergibt: $\gamma= 60°-\alpha$. Dann ist $\sin(\alpha) + \sin(\gamma) = \sin(\beta)$. Um dies zu zeigen benötigt man das Additionstheorem für $\sin(x-y)$ und die Gleichungen $\sin(120°)=\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ sowie $\cos(120°)= -\frac{1}{2}$ und $\cos(60°)=\frac{1}{2}$.

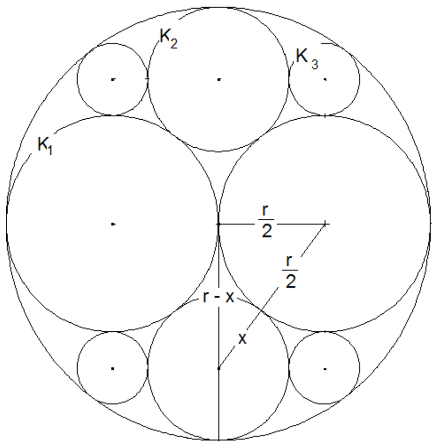


4.9 Der gemeinsame Radius aller Kreise sei r. Die Fläche der Kreise K_1 bis K_4 wird von jeder Geraden g_m halbiert, die durch P(r|0) geht. Da g_m auch K_5 halbieren muss, muss g_m durch den Mittelpunkt von K_5 Q(-2r|-r) gehen. Die Gerade PQ hat den Differenzenquotienten $\frac{0+r}{r+2r} = \frac{1}{3}$.

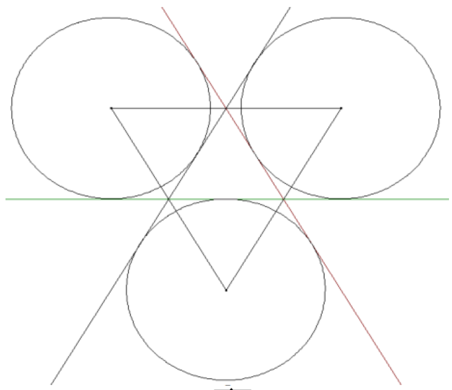


4.10 Das gleichseitige Dreieck KLM habe die Seitenlänge 2 und folglich die Höhe $\sqrt{3}$ (Pythagoras). Seine Fläche wird halbiert durch Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann gilt $|\overline{AB}| = \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1{,}4$. $F_{KLM} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Welchen Radius r muss ein Sechstelkreis haben, damit seine Fläche $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist? Ansatz $\frac{\pi r^2}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nach r aufgelöst $r = \sqrt{\frac{3}{\pi}\sqrt{3}}$. Dann ist der Bogen $\widetilde{CD} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{3}{\pi}\sqrt{3}} \approx 1{,}3$.

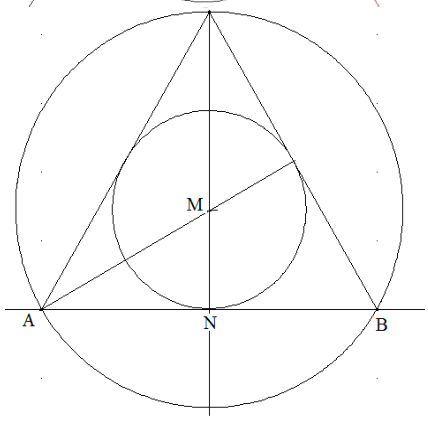
4.11 In der Skizze sieht man ein rechtwinkliges Dreieck, in dem gilt: $\left(\frac{r}{2}+x\right)^2 = (r-x)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$. Nach einiger Umformung erhält man daraus (1) r = 3x. Außerdem sieht man, dass der kleinste Abstand der Mittelpunkte von K_1 und K_3 $\frac{r}{2}+z = r-x$ ist. Zusammen mit (1) erhält man daraus r=6z. Nun ist $4\pi z^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{r}{6}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{9}$, also $\frac{1}{9}$ der Fläche von K.



4.12a) Spiegeln Sie das gleichseitige Dreieck an jeder Seite. Dann erhalten Sie als Bildpunkte, die nicht auf den Spiegelachsen liegen, die Ankreismittelpunkte.

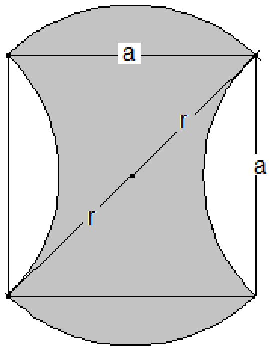


b) In einem gleichseitigen Dreieck sind Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende identisch. Daher ist der Mittelpunkt der M des Umkreises auch der Mittelpunkt des Inkreises und auch der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Letztere werden durch ihren Schnittpunkt M im Verhältnis 2:1 geteilt. $r_2 = |\overline{CM}|$ ist der Radius des Umkreises. N sei die Seitenmitte von $\overline{AB}$. Dann ist $|\overline{MN}|$ der Radius r_1 des Inkreises.

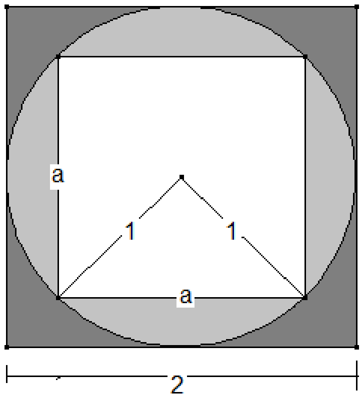


Folglich gilt $r_1 : r_2 = 1:2$. P sei der Fußpunkt des Lotes von einem Mittelpunkt eines Ankreises auf die berührende Dreiecksseite. Dann $|\overline{FP}| = r_1 + r_2 = r_3$ und folglich $r_1:r_2:r_3 = 1:2:3$.

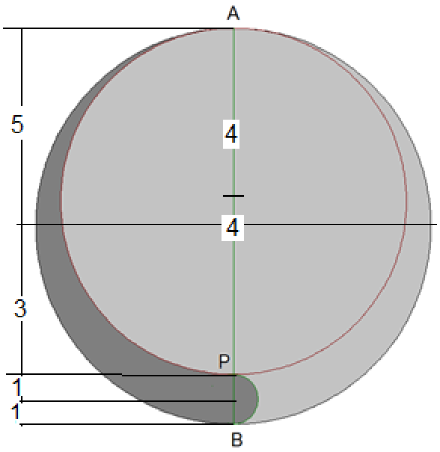
4.13 Schneidet man die Rundungen oben und unten ab und fügt sie rechts und links wieder an, entsteht ein Quadrat mit der Diagonalenlänge 2r. Wenn a die Seitenlänge dieses Quadrats ist, dann gilt nach Pythagoras $a^2+a^2=(2r)^2$ oder $a^2=2r^2$.



4.14 Legt man die Längeneinheit so fest, dass der Radius des Kreises 1 ist, dann hat das große Quadrat die Seitenlänge 2 (Durchmesser des Kreises) und den Flächeninhalt 4. Der Flächeninhalt der dunkelgrauen Fläche ist also $a_1=4-\pi$. Wenn a die Seitenlänge des inneren Quadrats ist, dann ist nach Pythagoras $a^2=2$. Der Flächeninhalt der hellgrauen Fläche ist dann $A_2=\pi-2$. Das gesuchte Flächenverhältnis ist demnach $\frac{A_1}{A_2}=\frac{4-\pi}{\pi-2}\approx 0{,}752$.



4.15 a) Wenn das Verhältnis der Durchmesser des kleinen und des mittleren Halbkreises 1:4 ist, dann ist auch das Verhältnis der Radien 1:4. Wählt man als Längeneinheit



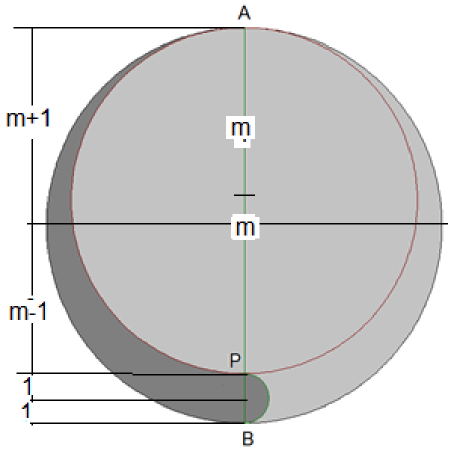
	Radius	Fläche
kleiner Halbkreis	1	$A_1=\frac{\pi}{2}$
mittlerer Halbkreis	4	$A_1=\frac{16\pi}{2}$

großer Halbkreis	5	$A_3 = \frac{25\pi}{2}$

den Radius des kleinen Halbkreises, so können Radien und Flächen in folgender Übersicht dargestellt werden:

Die hellgraue Fläche setzt sich zusammen als A_3-A_1+A_2=$\frac{25\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{16\pi}{2} = 20\pi$. Die dunkelgraue Fläche setzt sich zusammen als A_3-A_2+A_1=$\frac{25\pi}{2} - \frac{16\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 5\pi$. Das gesuchte Flächenverhältnis ist dann $\frac{5\pi}{20\pi} = \frac{1}{4} = 1{:}4$.

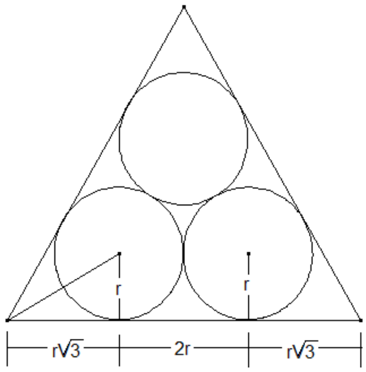
Da das Längenverhältnis von der Wahl der Längeneinheit unabhängig ist, wählen wir als kleinsten Radius wieder 1. Wenn das Verhältnis der Durchmesser des kleinen und des mittleren Halbkreises 1:m ist, dann ist auch das Verhältnis der Radien 1:m. Die Radien und Flächen können dann in folgender Übersicht dargestellt werden:



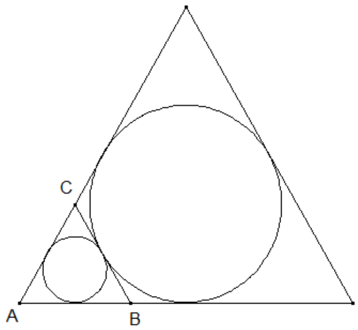
	Radius	Fläche
kleiner Halbkreis	1	$A_1 = \frac{\pi}{2}$
mittlerer Halbkreis	m	$A_1 = \frac{\pi}{2}m^2$
großer Halbkreis	m+1	$A_3 = \frac{\pi}{2}(m+1)^2$

Die hellgraue Fläche setzt sich zusammen als A_3 - A_1+A_2 =$\frac{\pi}{2}(m+1)^2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}m^2 = (m2+m)\pi$. Die dunkelgraue Fläche setzt sich zusammen als A_3 - A_2+A_1=$\frac{\pi}{2}(m+1)^2 - \frac{\pi}{2}m^2 + \frac{\pi}{2} = (m+1)\pi$. Das gesuchte Flächenverhältnis ist dann $\frac{(m+1)\pi}{\pi(a^2+a)} = \frac{1}{m} = 1{:}m$.

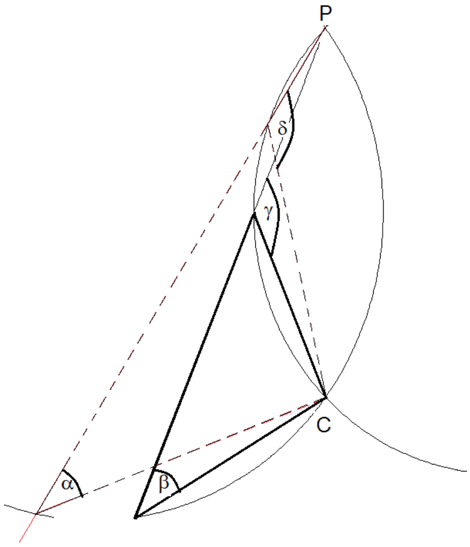
4.16 a) Man mache sich zunächst klar, dass die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ hat. Die Seitenläge des abgebildeten gleichseitigen Dreiecks sei 2, dann ist seine Höhe √3. Wenn jetzt r der Radius der drei gleichgroßen einbeschriebenen Kreise ist, dann gilt 2=2r√3+2r und dann $r = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$. Dann ist der Flächeninhalt aller drei einbeschriebenen Kreise $3\pi r^2 = 3\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^2 \approx 1{,}26$.



b) Der Radius des Inkreises eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 2 ist ein Drittel seiner Höhe √3, also $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Tangenten an den Inkreis trennen kleine gleichseitige Dreiecke ABC wie dargestellt ab, in denen jeweils ein kleiner Kreis Inkreis ist. Die Fläche des Dreiecks ABC ist $\frac{1}{9}$ der großen Dreiecksfläche und daher ist auch die Fläche des kleinen Inkreises $\frac{1}{9}$ der Fläche des großen Inkreises. Ein großer und zwei kleine Inkreise haben zusammen die Fläche $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{2}{9}\right) \approx 1{,}28$.

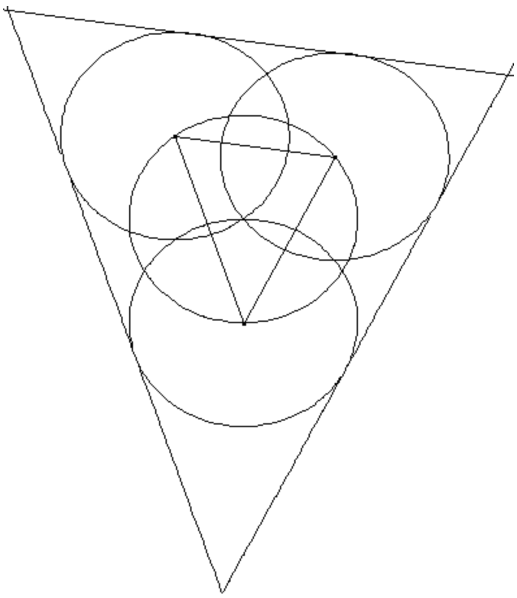


4.17 a) Wir zeichnen zwei derartige Dreiecke (gestrichelt und fett). Die Dreiecke stimmen sowohl in den Winkeln α und β (Winkel über dem gleichen Bogen von K_1) als auch in den gegenüberliegenden Nebenwinkeln γ und δ (Winkel über m gleichen Bogen von K_2) überein. Mit einem Nebenwinkel ist auch sein anliegendes Komplement festgelegt. Daher stimmen die Dreiecke in zwei Winkeln überein und sind ähnlich.

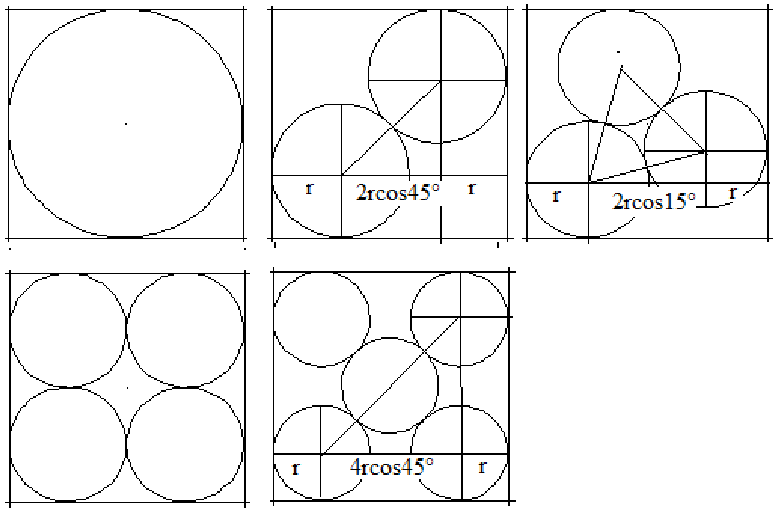


b)Hier ist der Nachweis ähnlich und einfacher, weil nicht mit Nebenwinkeln argumentiert werden muss.

4.18 Konstruieren Sie ein beliebiges Dreieckmit dem gegebenen Seitenverhältnis sowie dessen Umkreis mit dem Radius r. Schlagen Sie um jeden Eckpunkt des Dreiecks einen Kreis mit dem Radius r. Konstruieren Sie zu jeder Dreiecksseite eine Parallele im Abstand r, die zwei Kreise berührt, aber keinen weiteren der Kreise schneidet. Diese Parallelen schließen das gesuchte Dreieck ein.



4.19 Befolgen Sie den Hinweis für den Fall der 3 Kreise. Dann lässt sich die Quadratseite (1 LE) mit Hilfe des Radius ausdrücken und umgekehrt der Radius als Anteil von 1. Dann ist mit A = $k\pi r^2$ der Anteil der k Kreisflächen an der Quadratfläche 1 FE gegeben.



1 Kreis: r = ½ $A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 0{,}78540 = 78{,}540\%$

2 Kreise: 2r+2rcos45° = 1 und $r = \frac{1}{2+2cos45°}$. A = $2\pi r^2$

A ≈ 0,53901 = 53,901%

3 Kreise: 2r+2rcos15° = 1 und $r = \frac{1}{2+2cos15°}$. A = $3\pi r^2$

A ≈ 0,60964 = 60,964%

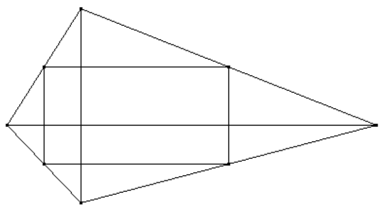
4 Kreise: r = $\frac{1}{4}$ $A = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi \approx 0{,}78540 = 78{,}540\%$

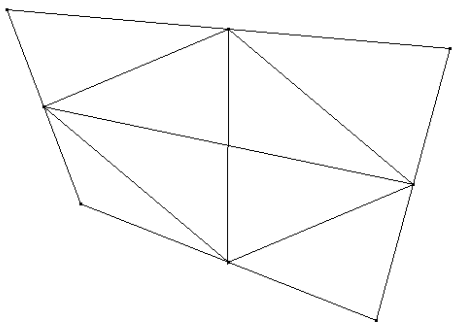
5 Kreise: 2r+4rcos45° = 1 und $r = \frac{1}{2+4cos45°}$. A = $5\pi r^2$

A ≈ 0,67377 = 67,377%

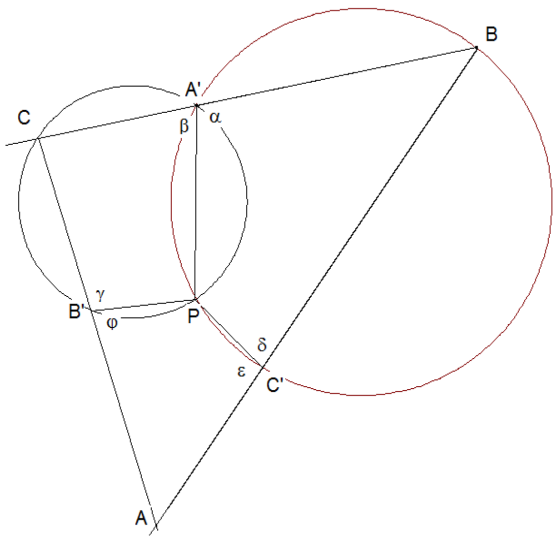
4.20 a) Zeichnen Sie die Diagonalen des Vierecks, dann verlaufen die Verbindungsstrecken der Mitten zweier benachbarter Seiten parallel zu einer Diagonale (Umkehrung eines Strahlensatzes). Immer zwei Seiten des Seitenmittenvierecks sind parallel zur gleichen Diagonale.

b)Wenn die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, tun dies auch jeweils zwei dazu parallele Seiten des Seitenmittenvierecks. Ein Parallelogramm mit je zwei zueinander senkrechten Seiten ist ein Rechteck und jedes Rechteck hat einem Umkreis.

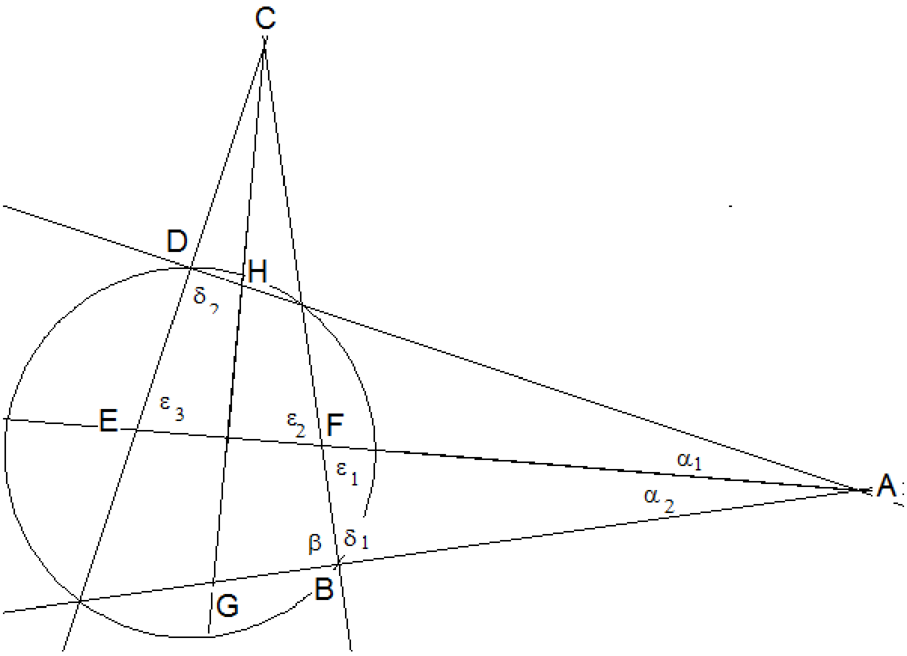




4.21 Zeichnen Sie das Dreieck ABC mit den Punkten A‘, B‘ und C‘ auf den Seiten. Konstruieren Sie dann den Kreis K_1 durch A‘, B und C’ sowie den Kreis K_2 durch B‘, A‘ und C. Die Kreise schneiden sich außer in A‘ in P. Zeichnen Sie die Strecken PA‘. PB‘ und PC‘. Dabei entstehen die Winkel α, β, γ, δ, ε und φ. γ ergänzt sich sowohl mit β als auch mit φ zu 180°.Daher ist $\beta=\varphi$. Aus entsprechenden Gründen sind $\varepsilon=\alpha$.Aus $\beta+\alpha=180°$ folgt, dass auch φ und ε sich zu 180° ergänzen und somit AC’PB’ ein Sehnenviereck ist. Damit liegen auch die Punkte A , C‘ und B‘ auf einem Kreis.



4.22 a) In der Abbildung haben gleichgroße Winkel abgesehen von der Fußnote gleiche Bezeichnungen.



$\alpha_1=\alpha_2$ (Winkelhalbierende), $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ (Scheitelwinkel), $\delta_1=\delta_2$ (ergänzen β zu 180°. Daher stimmen die Dreiecke EAD und BAF in zwei Winkeln überein und sind ähnlich.

b)$\varepsilon_2=\varepsilon_3$ (entsprechende Winkel in ähnlichen Dreiecken). Dreiecke mit gleichen Basiswinkeln sind gleichschenklig.

c) Für das Dreieck HGA gilt das Gleiche, wie für das Dreieck EFC da die Problemstellung bis auf Drehung und Verzerrung identisch ist.

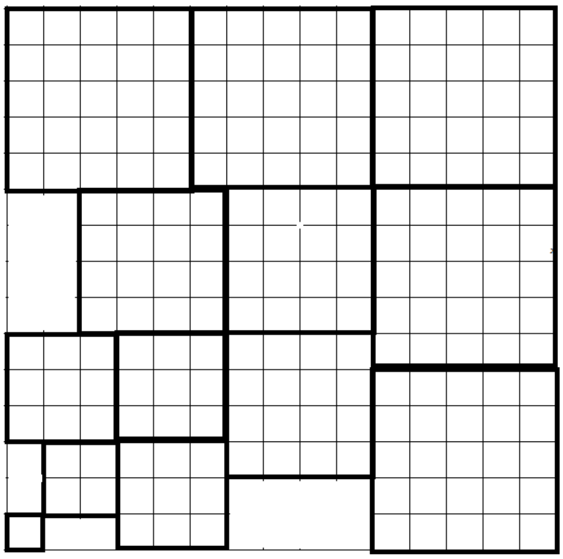
d) In gleichschenkligen Dreiecken sind Halbierende des Gegenwinkels der Basis gleichzeitig Mittelsenkrechte der Basis. Daher halbieren sich EF und HG mit ihrem Schnittpunkt und stehen senkrecht aufeinander. Vierecke mit zueinander senkrechten, sich halbierenden Diagonalen sind Rauten.

5. Besondere Aufgaben

Das Besondere an diesen Aufgaben ist entweder, dass ein verblüffender Sachverhalt der jeweiligen Aufgabe zugrunde liegt oder dass die Lösung erst nach einem Gedankenblitz gelingt. In wenigen Fällen ist beides der Fall.

5.1 Dreieckszahlen und Kubikzahlen

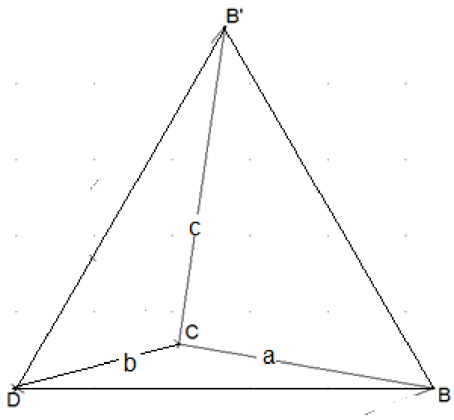
Die nachfolgende Skizze liefert Anlass zu der Begründung der Formel $1^3+2^3+3^3+\ldots +n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$. Führen Sie die Begründung aus.



5.2 Innerer Punkt eines gleichseitigen Dreiecks

Die Abstände a, b und c eines inneren Punktes von den drei Ecken eines gleichseitigen Dreiecks seien gegeben. Konstruieren Sie das gleichseitige Dreieck.

Anleitung: Konstruieren Sie ein Hilfsdreieck mit den drei gegebenen Abständen als Seitenlängen und führen Sie eine geeignete Drehung durch.



5.3 Drittelung einer Strecke

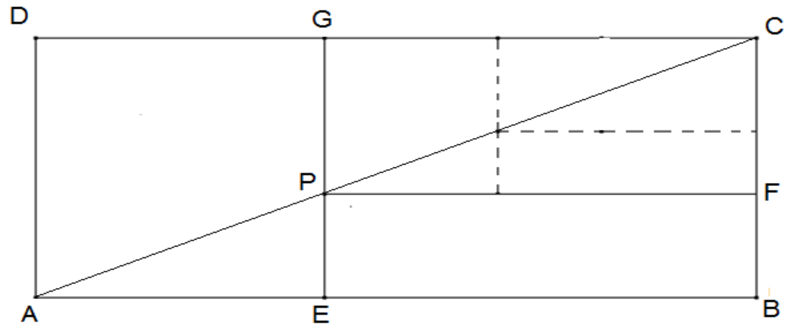
Gegeben ist das Parallelogramm ABCD. M sei der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und N sei der Mittelpunkt von $\overline{CD}$. Zeigen Sie: $\overline{AM}$ und $\overline{AN}$ dritteln die Diagonale $\overline{BD}$ des Parallelogramms. Anleitung: Zerlegen Sie das Parallelogramm mittels der Diagonale $\overline{AC}$ in zwei Dreiecke.

5.4 Punkte mit besonderer Eigenschaft

Die Punkte (0|0), (0|1), (1|1) und (1|0) sind Eckpunkte eines Einheitsquadrates im Koordinatensystem. Jeder von Ihnen hat die Eigenschaft, dass die Summe seiner Koordinaten gleich der Summe der Quadrate seiner Koordinaten ist, also $x+y=x^2+y^2$ gilt. Gibt es weitere Punkte mit dieser Eigenschaft und kann ggf. man einen geometrischen Ort dafür angeben?

5.5 Geometrische Reihe

Gegeben sei ein Rechteck ABCD mit der Seitenlänge $|\overline{AD}| = 1$. Das Rechteck ist so gewählt, dass darin das Einheitsquadrat AEGD und das zu ABCD ähnliche Rechteck PFCG sowie ein Rechteck EBFP Platz finden. Dann liegt P auf der Diagonalen AC (Strahlensatz; siehe Abbildung).



a) Das Rechteck PFCG ist das Bild von ABCD bei zentrischer Streckung (besser: Stauchung) mit dem Streckzentrum C und dem Streckfaktor q<1. Drücken Sie die Seitenlängen und den Flächeninhalt des Rechtecks EBFP mit Hilfe von q aus.

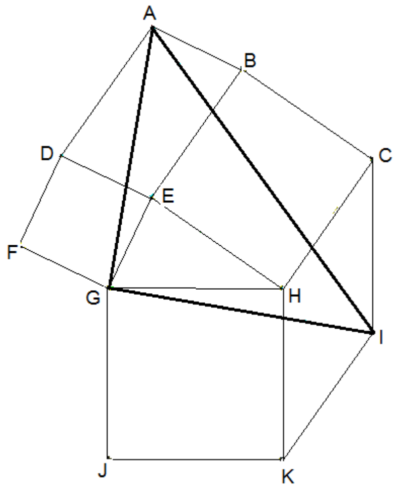
b) Die unter b) genannte zentrische Streckung soll auch $|\overline{EG}|$ und $|\overline{PF}|$ abbilden (Bilder gestrichelt angedeutet). Welchen Flächeninhalt haben die Bilder von AEGD und EBFP?

c) Drücken Sie die Fläche des Rechtecks ABCD durch q aus und nennen Sie eine Formel für die Summe $q^0 + q^1 + q^2 + q^3, \ldots$ mit unendlich vielen Summanden.

5.6 Das Fibonacci-Prinzip

Bilden Sie eine Zahlenfolge auf folgende Weise: Legen Sie die ersten beiden Glieder der Folge beliebig fest. Ein nächstes Folgenglied ist immer die Summe der beiden Vorgänger. Beispiel: Die ersten beiden Folgenglieder seien 2 und 5 (frei festgelegt).Dann ist das dritte Folgenglied 7 (= 2 + 5) und es geht so weiter 2, 5, 7, 12, 19, 31, …Das 7. Folgenglied ist 50. Zeigen Sie: Die Summe der ersten 10 Folgenglieder ist (unabhängig von den Startgliedern) das 11-fache des siebten.

5.7 Kongruente Dreiecke

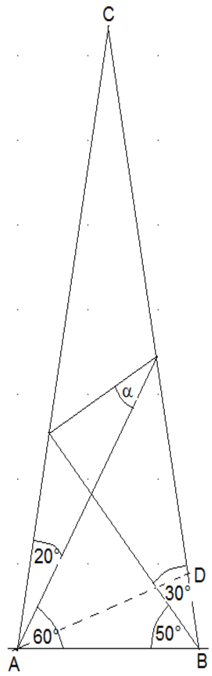


Gegeben sei ein beliebiges Dreieck GHE. EHCB sei das Quadrat über EH. FGED sei das Quadrat über GE und JKHG sei das Quadrat über GH. DEBA und KICH seien Parallelogramme.

a) Zeigen Sie die Kongruenz der Dreiecke AEB, GHE und HIC.

b) Zeigen Sie: AGI ist gleichschenklig.

5.8 Langleys Aufgabe



Der britische Mathematiker E.M. Langley gründete 1884 „The Mathematical Gazette". Darin wurde (sinngemäß) folgende Aufgabe abgedruckt:

Im Dreieck ABC sind vier Winkelgrößen gegeben (siehe Abbildung) und $\overline{AD}$ ist Hilfslinie mit der Länge $|\overline{AB}|$.

a) Tragen Sie alle Winkelgrößen, die sich aus den gegebenen schließen lassen, in die Skizze ein.

b) Wo liegen gleichschenklige Dreiecke? Umgrenzen Sie diese (ggf. durch eine weitere Hilfslinie).

c) Bestimme die Größe des Winkels α.

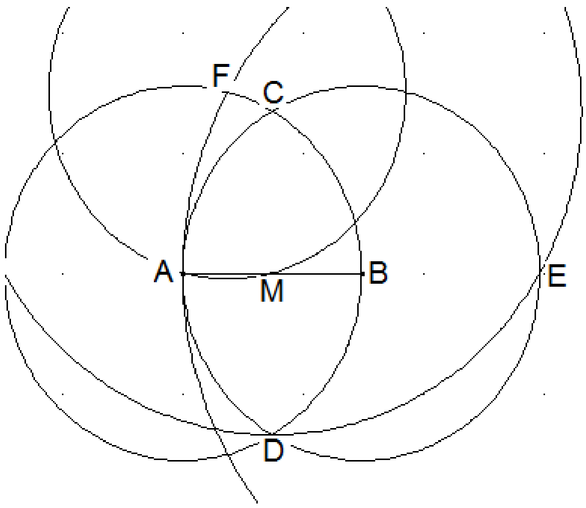
5.9 Konstruktionen ohne Lineal

1672 beschrieb der Däne Georg Mohr, wie man Grundkonstruktionen mit dem Zirkel allein (also **ohne Lineal**) durchführen kann. Mohr geriet aber in völlige Vergessenheit. Über ein Jahrhundert später erfand 1797 Lorenzo Mascheroni diese Konstruktionen neu. Erst 1928 fand ein Student das Buch von Mohr auf einem Flohmarkt, und daraufhin wurde Mohr als erster Erfinder der bis dahin nach Mascheroni benannten Konstruktionen gewürdigt. Hier zwei Beispiele aus dem Buch von Mohr

a) Konstruktion eines Quadrats

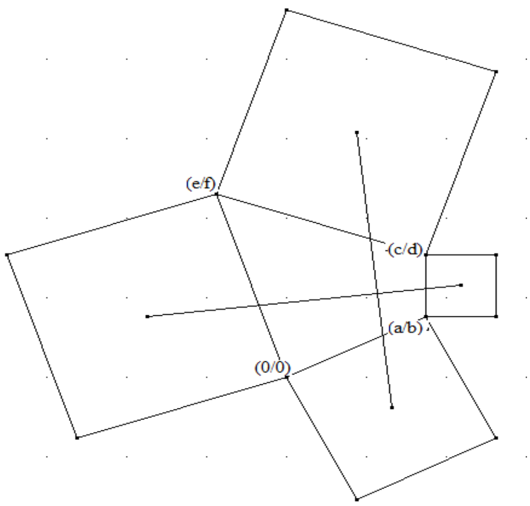
Zeichnen Sie einen Kreis K_M um M mit beliebigem Radius r. Wählen Sie A auf K_M. Tragen Sie von A ausgehend und mit dem Radius r nacheinander auf dem Kreis K_M die Punkte B, C und D ab. Schlagen Sie den Kreis K_D um D mit dem Radius DB und den Kreis K_{A1} um A mit dem gleichen Radius. K_D und K_{A1} schneiden sich in E. Schlagen Sie den Kreis K_{A2} um A mit dem Radius ME. K_{A2} und K_M schneiden sich in F und in G. Zeigen Sie: *AFDG ist ein Quadrat.*

b) Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke



Zum Verständnis der Konstruktion sei nebenstehende Skizze gegeben. Die darin enthaltenen Punkte werden ab C in alphabetischer Reihenfolge konstruiert. Die Punkte A und B sowie die Strecke dazwischen sind gegeben. Zeigen Sie: Der Kreis um F mit dem Radius FA schneidet AB in ihrem Mittelpunkt.

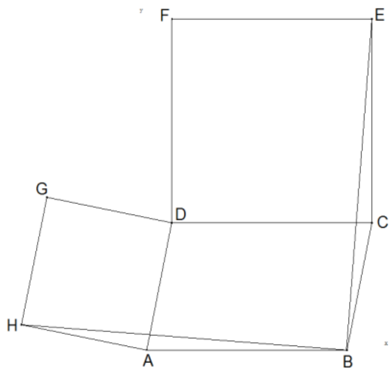
5.10 Satz von van Aubel



Der holländische Mathematiklehrer Henri van Aubel veröffentlichte 1878 folgenden Satz:

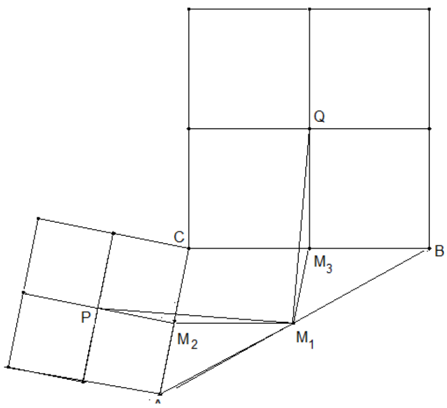
Über den Seiten eines beliebigen Vierecks werden Quadrate konstruiert (die das Viereck nicht überdecken). Dann sind beide Strecken zwischen den Mittelpunkten gegenüberliegender Quadrate gleich lang und zueinander rechtwinklig (Abbildung rechts).

a) Beweisen Sie zunächst folgenden Hilfssatz: Über zwei Seiten des Parallelogramms ABCD werden die Quadrate DCEF und HADG errichtet. Dann sind die Dreiecke HAB und BCE kongruent und die Seiten HB sowie BE stehen senkrecht aufeinander.

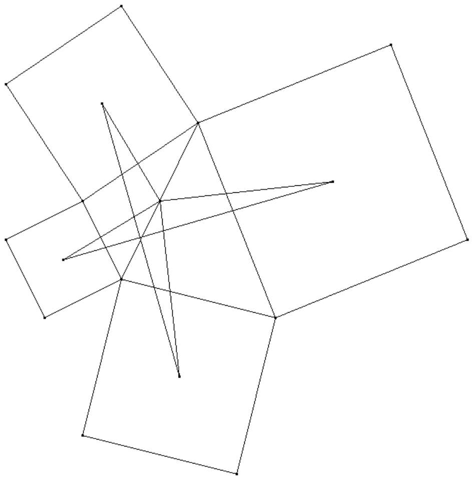


b) Beweisen Sie damit einen weiteren Hilfssatz:

Sei ABC ein beliebiges Dreieck und P und Q die Mittelpunkte der Quadrate über den Seiten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{CB}$: Dann gilt für den Mittelpunkt M_1 der Seite AB: $\overline{M_1Q}$ und $\overline{M_1P}$ sind gleichlang und stehen senkrecht aufeinander.

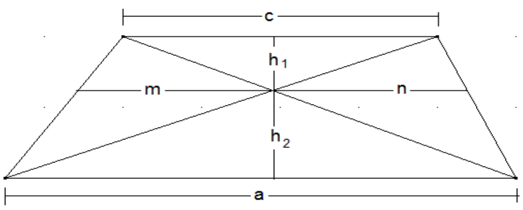


c) Beweisen Sie jetzt den Satz von Aubel unter Verwendung der nebenstehenden Skizze



5.11 Harmonisches Mittel im Trapez

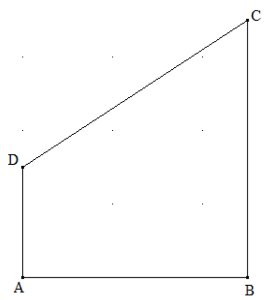
Gegeben ist ein Trapez mit seinen Diagonalen. Aus der Parallelen durch den Diagonalenschnittpunkt zu den parallelen Trapezseiten schneidet das Trapez eine Länge d = m + n heraus (siehe Abbildung). Zeigen Sie: d = m + n ist das harmonische Mittel aus den Längen der parallelen Seiten a und c, also $d = \frac{2ac}{a+c}$.



5.12 Mittelpunkt einer Strecke ohne Zirkel

Der Mittelpunkt einer gegebenen Strecke AB ist nur mit Hilfe eines Geodreiecks, aber ohne Zirkel zu konstruieren.

5.13 Bewegungsaufgabe und harmonisches Mittel

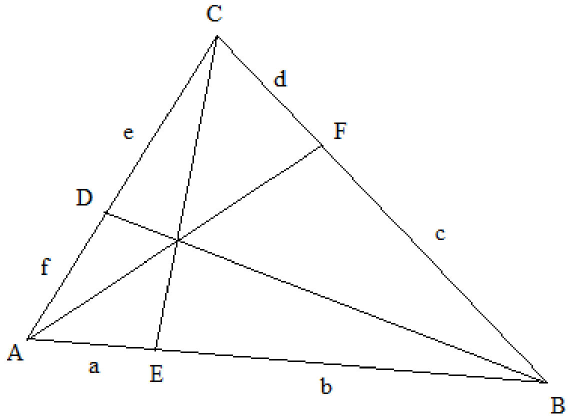


Das Trapez ABCD hat bei A und bei B je einen rechten Innenwinkel (siehe Abbildung).

a) Es sei $|\overline{BC}| = a$ und $|\overline{AD}| = b$. Welchen Abstand hat der Diagonalenschnittpunkt des Trapezes ABCD von der Strecke AB?

b) Der Papst sendet einen Boten mit einer Nachricht von Rom nach Venedig, der sich Tag und Nacht in gleichmäßigem Tempo fortbewegt und für die gesamte Strecke 9 Tage braucht. Der Empfänger der Nachricht eilt dem päpstlichen Boten Tag und Nacht in gleichmäßigem Tempo entgegen und hätte für die ganze Strecke 7 Tage gebraucht. Wann begegnen sich die beiden, wenn sie gleichzeitig starten.

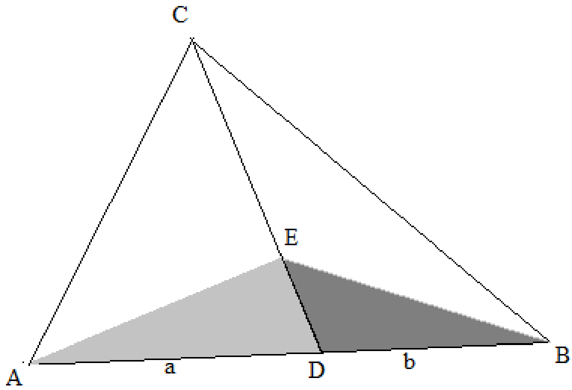
5.14 Der Satz von Ceva



Der italienische Mathematiker Giovanni Ceva (1647 bis 1734) bewies 1678 in seinem Werk „De lineis rectis“ den Satz: *Wenn auf den Seiten eines Dreiecks ABC die Punkte D, E und F liegen, welche die Seiten in den Verhältnissen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f}$ teilen und die Strecken von je einem Eckpunkt des Dreiecks zum gegenüberliegenden Teilungspunkt durch einen gemeinsamen Punkt gehen, dann ist das Produkt der Teilungsverhältnisse gleich 1 ($\frac{f}{e} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = 1$).*

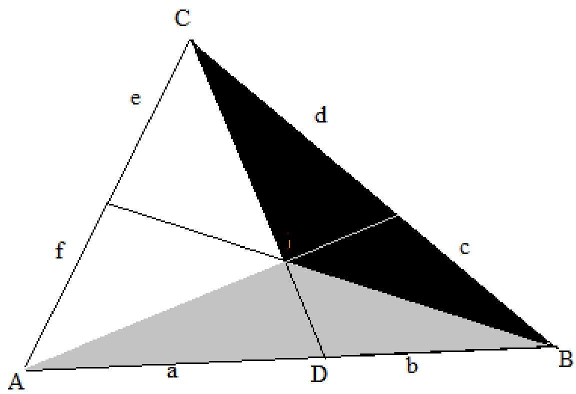
Zum Beweis braucht man den folgenden Hilfssatz:

Im Dreieck ABC teilt D die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $\frac{a}{b}$. E sei ein Punkt auf $\overline{CD}$. Dann wird die Fläche des Dreiecks ABE von $\overline{ED}$ im Verhältnis $\frac{a}{b}$ geteilt. Auch die Flächen der Dreiecke AEC und EBC stehen in diesem Flächenverhältnis.



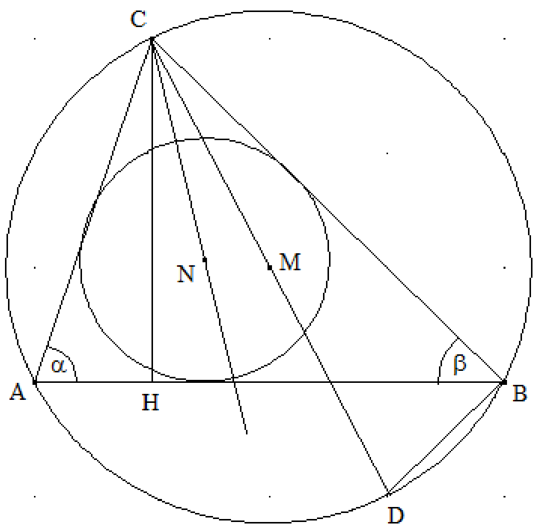
a) Beweisen Sie diesen Hilfssatz.

b) Begründen Sie mit Hilfe der Skizze rechts und dem Hilfssatz den Satz von Ceva.



5.15 Sätze über Winkel

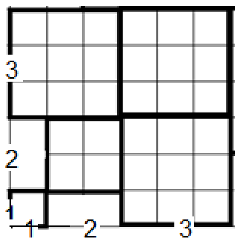
Gegeben ist ein Dreieck ABC sowie sein Um- und Inkreis mit den Mittelpunkten M bzw. N. Die Gerade CM schneidet den Umkreis in D. Der Fußpunkt der Höhe durch C auf AB sei H.



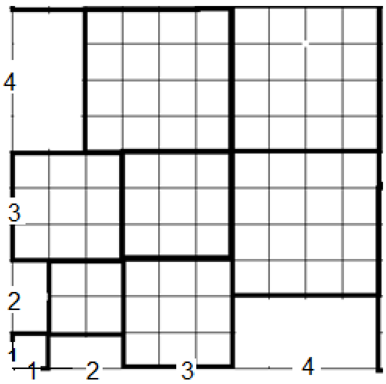
a) Beweisen Sie: Die Dreiecke AHC und DBC sind ähnlich.

b) Beweisen Sie: Die Winkelhalbierende durch C im Dreieck ABC halbiert auch den Winkel HCM (das ist der Winkel zwischen HC und CM.

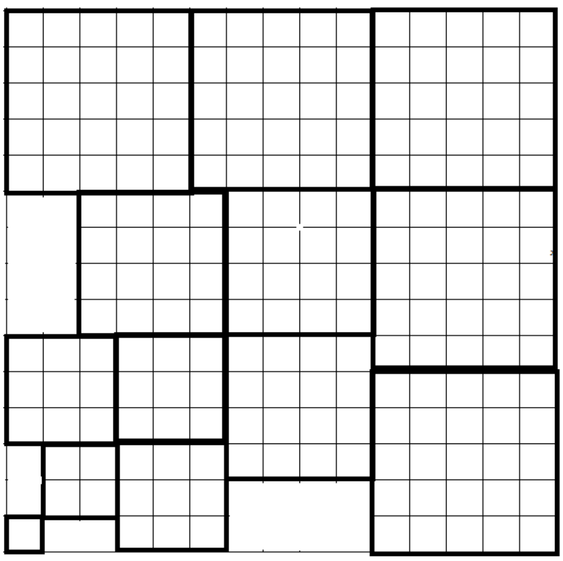
Lösungen



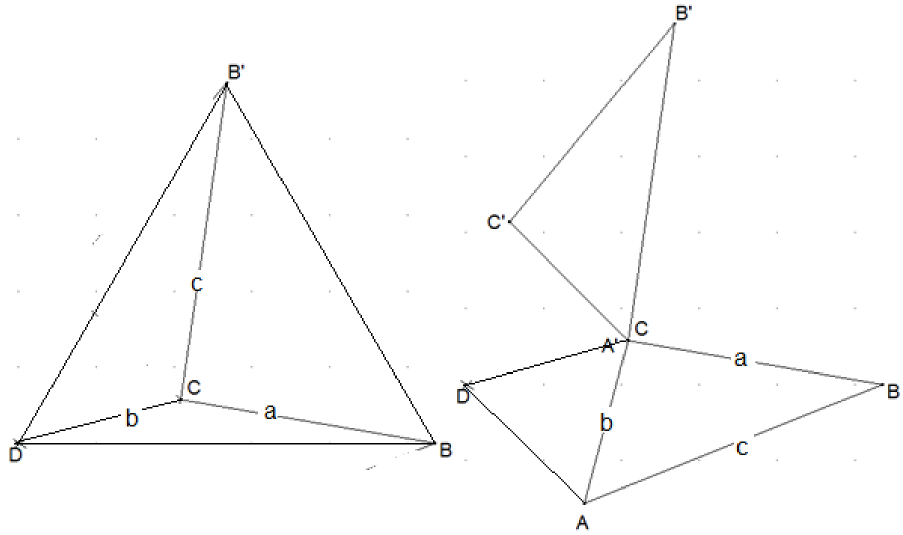
5.1 Für n=1 und n=2 kann man nachrechnen: $1^3=1^2$, $1^3+2^3=(1+2)^2$. Für n=3 verwendet man denn einen Ausschnitt der gegebenen Skizze (rechts). Hier sind zu $(1+2)^2 = 1^3+2^3$ insgesamt $3 \cdot 3^2$ hinzugefügt und so die Fläche der Größe $(1+2+3)^2$ entstanden. Also gilt: $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$. Für n=4 fügt man an diese Skizze rechts und oben einen Streifen der Breite 4 an (siehe Abbildung rechts):



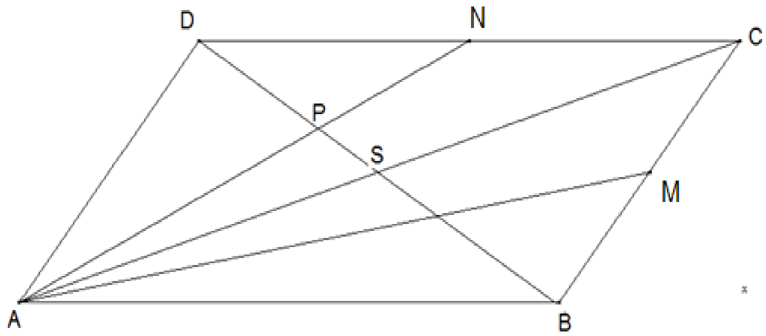
Auf diese Weise ist eine Fläche von $4 \cdot 4^2$ zu $1^3+2^3+3^3$ hinzugekommen und so die Fläche der Größe $(1+2+3+4)^2$ entstanden. Also ist $4 \cdot 4^2+3 \cdot 3^2+2 \cdot 2^2+1 \cdot 1^2=(1+2+3+4)^2$. Jetzt fügen wir rechts und oben einen Streifen der Breite 5 an und erhalten die in der Aufgabe gegebene Skizze. Dabei ist eine Fläche von 5 mal 5^2 hinzugekommen. Wenn man die Summe der ersten n natürlichen Zahlen mit d(n) bezeichnet, dann sieht man hier, dass $n^3=n \cdot (2 \cdot d(n-1)+n)$ ist. Nach Addition $[d(n-1)]^2$ auf beiden Seiten folgt $[d(n-1)]^2+ n^3= [d(n-1)]^2 +n \cdot (2 \cdot d(n-1)+n)$ und $[d(n-1)]^2+ n^3= [d(n-1) +n]^2$.



5.2 Konstruieren Sie das Hilfsdreieck und über einer Seite AC das gleichseitige Dreieck ACD. Drehen Sie das Hilfsdreieck um 60° um den Punkt D, sodass A auf C fällt (Abbildung unten rechts). Dann ist DBB‘ (Abbildung unten links) das gesuchte gleichseitige Dreieck.

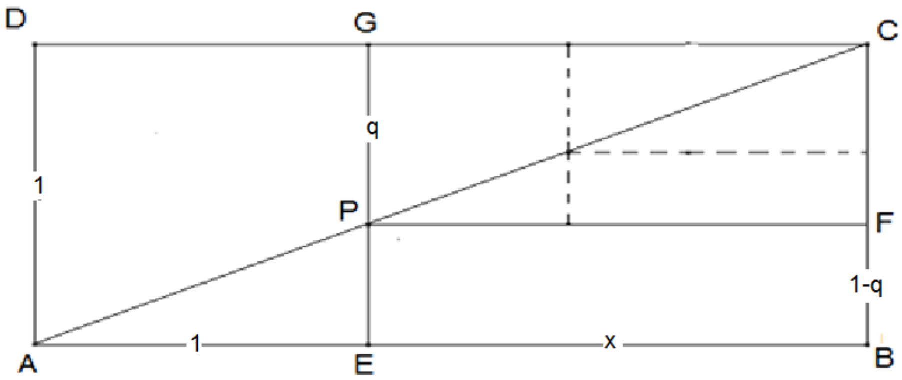


5.3 Der Diagonalenschnittpunkt sei S. Im Dreieck ACD sind AN ebenso wie DS Seitenhalbierende. Ihr Schnittpunkt P teilt DS im Verhältnis 2:1. Bei Drehung von ACD um 180° fällt DS auf BS und BS wird durch AM ebenfalls im Verhältnis 2:1 geteilt. Daraus folgt die Behauptung.



5.4 Die Gleichung $x+y=x^2+y^2$ kann umgeformt werden zu $(x-0,5)^2+(y-0,5)^2=0,5$, also zur Gleichung eines Kreises um $M(0,5|0,5)$ mit dem Radius $0,5\cdot\sqrt{2}$. Der geometrische Ort aller Punkte mit der geforderten Eigenschaft ist der Umkreis des gegebenen Einheitsquadrates.

5.5



a) Es sei $x = |\overline{EB}| = |\overline{PF}| = |\overline{GC}|$ Nach dem zweiten Strahlensatz gilt: $\frac{x}{q} = \frac{x+1}{1}$ und daher $x = \frac{q}{1-q}$. Weil $|\overline{FB}| = 1-q$, hat das Rechteck EBFP den Flächeninhalt q.

b) Bei zentrischer Stauchung mit dem Faktor q werden Flächen mit dem Faktor q^2 gestaucht. Daher hat das Bild von AEGD den Flächeninhalt q^2 und das Bild von EBFP den Flächeninhalt q^3.

c) In Rechteck ABCD finden ein Quadrat der Fläche $1=q^0$, ein Rechteck der Fläche q und eine rechteckige Restfläche PFCG Platz. In der Restfläche finden ein Quadrat der Fläche q^2, ein Rechteck der Fläche q^3 und eine rechteckige Restfläche zweiter Ordnung Platz. In der Restfläche zweiter Ordnung finden ein Quadrat der Fläche q^4, ein Rechteck der Fläche q^5 und eine rechteckige Restfläche dritter Ordnung Platz. Und so weiter. Im Rechteck ABCD finden insgesamt Flächen der Größen q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, …. Platz. Andererseits ist $F_{ABCD}=1+\frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}$. Also gilt $\frac{1}{1-q} =$ $q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, ….$

5.6

Die ersten beiden Glieder seien a und b. Dann wird die Folge durch diese Wertetabelle wiedergegeben:

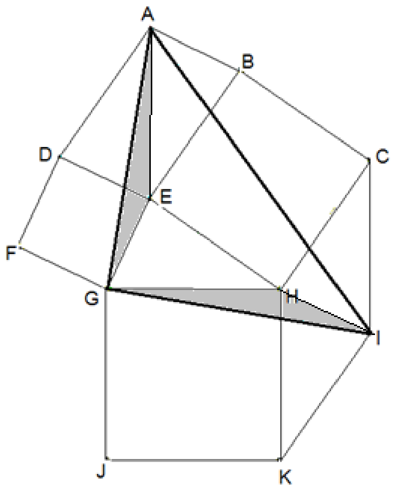
1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	b	a+b	a+2b	2a+3b	3a+5b	5a+8b	8a+13b	13a+21b

Das 10.Glied ist 21a+34b. Die Summe der ersten 10

Glieder ist 55a+88b. Das 11-Fache des 7.Gliedes ist 55a+88b.

5.7

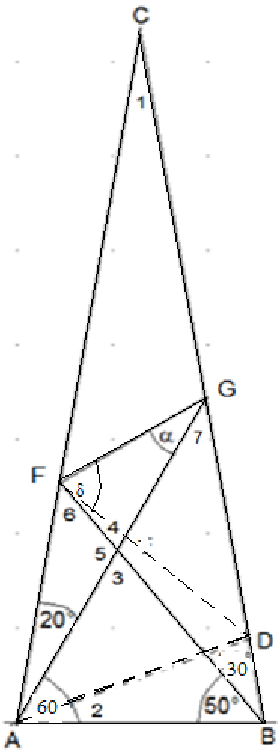
a) Die Dreiecke AEB und GHE stimmen in den Längen zweier Seiten überein. Die Seiten $|\overline{BE}|$ und $|\overline{EH}|$ grenzen an das gleiche Quadrat und $|\overline{AB}| = |\overline{DE}|$ (Parallelogramm) sowie $|\overline{GE}| = |\overline{DE}|$ (Quadrat). β und α_2 ergänzen sich zu 180° (Vollwinkel - 2·90°). Auch β und α_1 ergänzen sich zu 180° (Parallelogramm). Daher ist $\alpha_1=\alpha_2$, und die Dreiecke sind kongruent. Ein entsprechender Beweis lässt sich zu Kongruenz der Dreiecke GHE und HIC führen.



b) Die Vollwinkel um H und um E sind aus je 5 Winkeln zusammengesetzt, wovon 4 paarweise gleichgroß sind. Also gilt das auch für den fünften. Die Dreiecke GEA und GIH stimmen in zwei Winkeln und zwei Seiten überein. Deshalb ist $|\overline{AG}| = |\overline{GI}|$, und das Dreieck AGI ist gleichschenklig.

5.8 a)

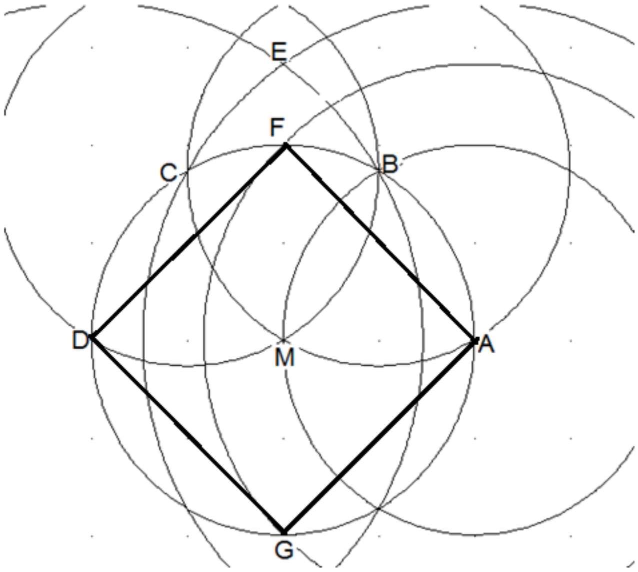
Nr	Größe	Begründung
1	20°	Winkelsumme ABC
2	20°	ABC ähnlich zu ABD
3	70°	Winkelsumme ABE
4	70°	Scheitelwinkel
5	110°	Nebenwinkel
6	50°	Winkelsumme AEF
7	40°	Winkelsumme ABG



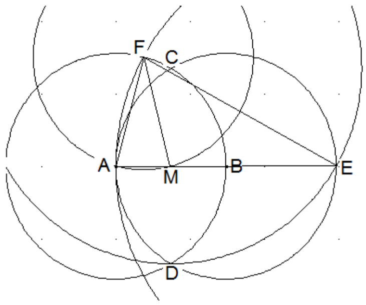
a) Eine weitre Hilfslinie ist FD. Jetzt ist ABF gleichschenklig (gleiche Basiswinkel) und ADF gleichseitig (gleichschenklig mit einem 60°-Winkel). Dann ist FDG gleichschenklig (gleiche Basiswinkel). Es gilt $|\overline{AD}| = |\overline{GD}|$ (gleiche Basiswinkel im Dreieck ADG), und es gilt $|\overline{AD}| = |\overline{FD}|$ (gleichseitiges Dreieck ADF).Dann ist das Dreieck FDG gleichschenklig und daher (1) $\delta=\alpha+40°$.

b) Außerdem ist $\delta+10°+30°+40°+\alpha=180°$ und folglich (2) $\delta+\alpha=100°$. Aus (1) und (2) folgt $\alpha=30°$.

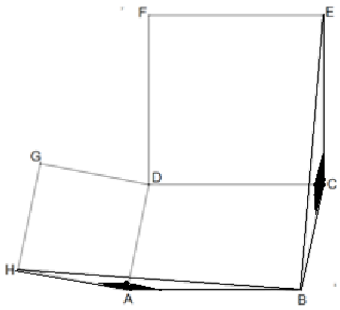
5.9 a) Wir wählen den Radius des zuerst gezeichneten Kreises K_M als Längeneinheit. Dann werden die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge 1 durch Abtragen des Radius auf dem Kreis konstruiert. Eine Diagonale, die nicht durch den Mittelpunkt des Sechsecks mit der Seitenlänge 1 geht, hat die Länge √3.Das heißt $|\overline{DB}| = |\overline{AE}| = \sqrt{3}$. Im Dreieck MAE ist $|\overline{MA}| = 1$ und $|\overline{AE}| = \sqrt{3}$. Nach Pythagoras ist dann $|\overline{ME}| = \sqrt{2}$ und folglich auch $|\overline{FA}| = |\overline{AG}| = \sqrt{2}$. Daher liegen die Punkte A,G, D und F regelmäßig auf KM verteilt (Abstand benachbarter Punkte √2) und bilden ein Quadrat.



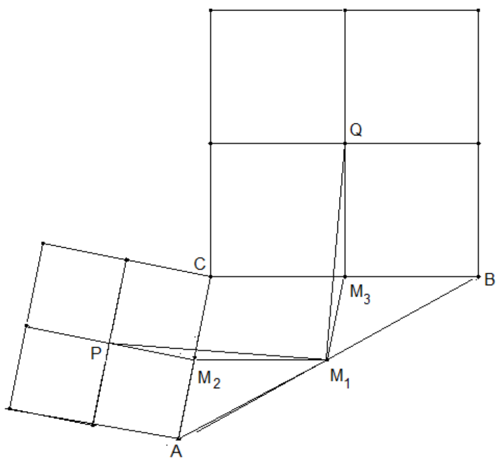
b) Zum Beweis der Richtigkeit der Konstruktion sind Hilfslinien erforderlich, die (weil es ja nicht um die Konstruktion geht) mit einem Lineal gezogen werden dürfen (siehe Abbildung). A, B und E liegen gemäß Konstruktion auf einer Geraden, und die Dreiecke AMF und AEF sind ähnlich (gleichschenklig mit einem gemeinsamen Winkel). Sei $|\overline{AF}|$=r der Radius des Kreises um A, dann gilt $\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{AF}|}{|\overline{AM}|}$ oder $\frac{2r}{r} = \frac{r}{|\overline{AM}|}$ und daher $2|\overline{AM}| = |\overline{AB}|$.



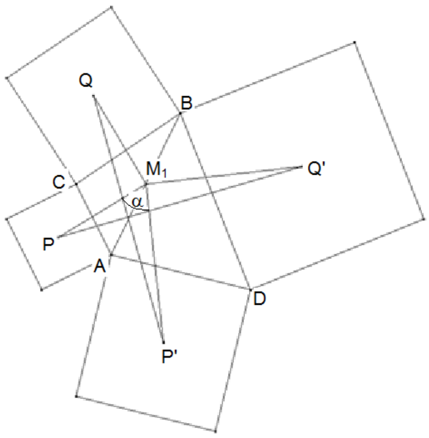
5.10 a) Die Dreiecke HAB und BCE sind kongruent (Übereinstimmung in zwei Seitenlängen und dem schwarz gekennzeichneten Winkel dazwischen). Also ist $|\overline{HB}| = |\overline{BE}|$. In den kongruenten Dreiecken HAB und BCE sind paarweise jeweils zwei Seiten senkrecht zueinander, nämlich HA zu BC und AB zu EC. Dann müssen auch die dritten Seiten senkrecht zueinander sein, nämlich HB⊥BE.



b) Das Parallelogramm ABCD aus a) wird umbenannt in $M_1M_2M_3C$ und die Seiten CM_3 sowie CM_2 werden auf das Doppelte verlängert zu $\overline{CB}$ bzw. $\overline{CA}$. Die Mittelpunkte der Quadrate über den Dreiecksseiten $\overline{CB}$ bzw. $\overline{CA}$ werden umbenannt in Q bzw. P. Dann bleibt alles aus dem Hilfssatz unter a) gültig.

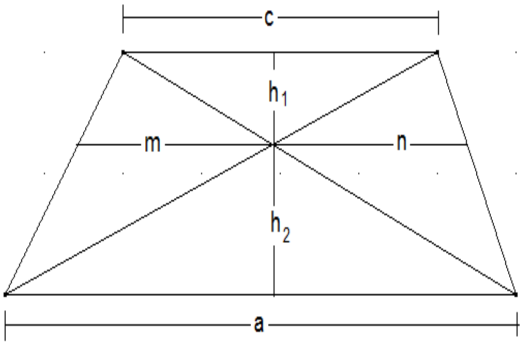


c) Ergänzen Sie das Dreieck ABC zum Viereck ADBC. Die Mittelpunkte der Quadrate über den Seiten des Vierecks sind dann P, Q, P‘ und Q‘. Die Dreiecke PQ’M1 und QP’M1 stimmen in zwei Seitenlängen (siehe oben) und dem eingeschlossenen Winkel α+90° überein. Sie sind also kongruent. Die Seiten PQ‘ und QP‘ sind gleichlang. Da in den kongruenten Dreiecken zwei Paare



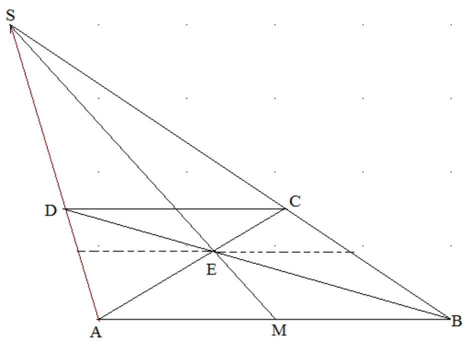
entsprechender Seiten senkrecht zueinander sind, muss für die dritte Seite gelten PQ‘ $\perp$ QP‘.

5.11 Sei $H=h_1+h_2$. Nach einem Strahlensatz gilt: $\frac{h_1}{m}=\frac{H}{a}$ und $\frac{h_1}{n}=\frac{H}{a}$. Folglich ist m=n. Danach gilt $\frac{c}{n}=\frac{H}{H-h_1}$ oder (1) $H-h_1=\frac{H\cdot n}{c}$ und $\frac{a}{n}=\frac{H}{h_1}$ oder (2) $h_1=\frac{H\cdot n}{a}$.



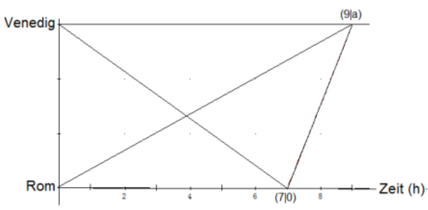
(2) in (1) eingesetzt ergibt $H-\frac{H\cdot n}{a}=\frac{H\cdot n}{c}$ und nach Division durch H: $1-\frac{n}{a}=\frac{n}{c}$ und nach weiteren Umformungen schließlich $\frac{1}{n}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$. Die letzte Gleichung lässt sich zu $n=\frac{ca}{c+a}$ umformen und wegen 2n=d gilt $d=\frac{2ca}{c+a}$.

5.12 Zeichnen Sie eine Parallele CD zu AB sowie die Diagonalen des Trapezes ABCD. Der Diagonalenschnittpunkt sei E. DA und CB schneiden sich in S. Die Gerade SE halbiert die Strecke $\overline{AB}$. Zur Begründung dient der Anfang der Lösung zu 5.11.



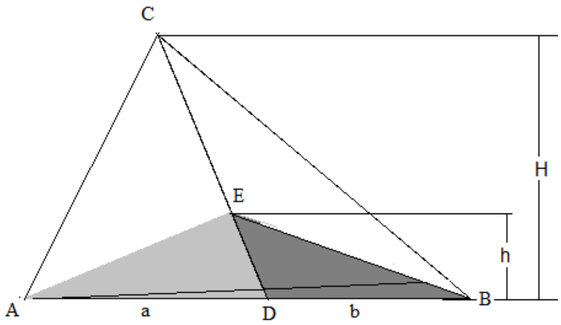
5.13 a) Aus Aufgabe 5.11 entnehmen wir: Der gesuchte Abstand ist das halbe harmonische Mittel aus a und c, nämlich $\frac{ab}{a+b}$.

b) Stellen Sie die Gegebenheiten in einem Weg-Zeit-Diagramm dar. Die Entfernung Rom-Venedig sei a.



Dann ist die t-Koordinate des Schnittpunktes der Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{ax}{9}$ und $y = \frac{a(x-7)}{-7}$ die Lösung. Leichter ist es aber, sich auf ein Ergebnis aus 5.11 zu beziehen und das halbe harmonische Mittel von 9 und 7 zu berechnen. In jedem Falle treffen sich die beiden 1,5 Stunden vor Ablauf des vierten Tages nach Start.

5.14 a) Mit den Bezeichnungen nebenstehender Skizze gilt: $F_{ADE} = a \cdot \frac{h}{2}$ und $F_{DBE} = b \cdot \frac{h}{2}$. Für Dreiecke gleicher Höhe gibt das Längenverhältnis der Grundseiten das Flächenverhältnis an.

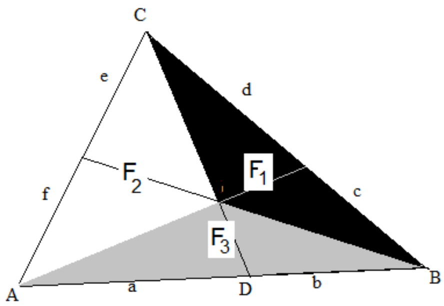


$F_{ADC} = a \cdot \frac{H}{2}$.

$F_{AEC} = F_{ADC} - F_{ADE} = a \cdot \frac{H}{2} - a \cdot \frac{h}{2} = a \cdot \frac{H-h}{2}$ und

$F_{EBC} = F_{DBC} - F_{DBE} = b \cdot \frac{H}{2} - b \cdot \frac{h}{2} = b \cdot \frac{H-h}{2}$. Also gilt: $\frac{F_{AEC}}{F_{EBC}} = \frac{a}{b}$.

c) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}$; $\frac{F_2}{F_3} = \frac{d}{c}$; $\frac{F_3}{F_1} = \frac{f}{e}$ (gemäß Hilfssatz). $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{f}{e} = \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_2}{F_3} \cdot \frac{F_3}{F_1} = 1$



5.15 a) Abbildung nächste Seite. Die hellgrauen Winkel sind gleichgroß (Umfangswinkel über dem gleichen Bogen CB). Die dunkelgrauen Winkel sind rechte Winkel (Winkel im Thaleskreis bzw. Winkel zwischen Höhe und Grundseite). Die Dreiecke AHC und DBC stimmen in zwei Winkelgrößen überein und sind folglich ähnlich.

b) Die schwarzen Winkel sind gleichgroß (entsprechende Winkel in ähnlichen Dreiecken). Es gilt $\delta+\varepsilon=\varphi+\delta$ (CN ist Winkelhalbierende). Nach Subtraktion von δ auf beiden Seiten gilt $\varepsilon=\varphi$. D.h. CN halbiert auch den Winkel HCM.