Universität Bielefeld

6. Aufgabenblatt — Analysis I

Aufgabe 6.1 (4 Punkte). a) Untersuchen Sie die Folgen (x_n) und (y_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

$$x_n = \sqrt[n]{2n} + \left(\frac{e}{4}\right)^n \quad , \quad y_n := \frac{\sqrt{2^n + 2}}{\left(\sqrt{2}\right)^n + 1}$$

b) Es seien a eine nichtnegative reelle Zahl und (a_n) eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Zeigen Sie durch direkten Nachweis der Definition der Folgenkonvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Aufgabe 6.2 (4 Punkte). Es sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

a) Es sei $y > 0$ eine reelle Zahl. Betrachten Sie die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$, welche wie folgt definiert sind: Es seien $a_1 = 0$, $b_1 = y + 1$. Sind a_n, b_n für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits definiert, so definieren wir mit $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ dann

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{falls } c_n^k \geq y \\ c_n & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{falls } c_n^k \geq y \\ b_n & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die Intervalle (I_n) eine Intervallschachtelung bilden, d.h. die Voraussetzungen von Satz 4.8 erfüllen.

b) Es sei $y > 0$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie mit Hilfe von a), dass es genau eine positive Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $x^k = y$.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte). a) Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere und nach unten beschränkte Menge. Beweisen Sie: Es gilt $l = \inf M$ genau dann, wenn l ist eine untere Schranke von M ist und es eine Folge (a_n) gibt mit $a_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

b) Formulieren Sie eine analoge Aussage für das Supremum einer nichtleeren und nach oben beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}$ und beweisen Sie diese.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte). a) Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$.

b) Es sei $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge der natürlichen Zahlen. Beweisen Sie, dass es eine surjektive Abbildung $f_2 : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ gibt.

Hinweis: Es ist hilfreich, die Binärentwicklung reeller Zahlen in $[0,1]$ zu verwenden.

c) Beweisen Sie, dass $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.