Allgemeine Aufgaben zur Aussagenlogik

Induktionsbeweise

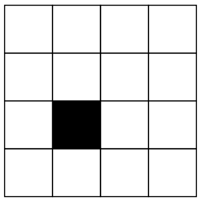
Aufgabe 1: Induktionsbeweise über natürlichen Zahlen

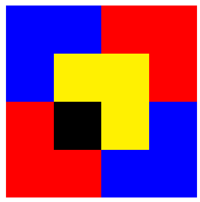
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion!

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$.

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Menge M gilt: wenn $|M| = n$, dann hat M genau 2^n Teilmengen.

3. Das linke Bild zeigt ein 4×4-Gitter, bei dem ein Feld entfernt wurde, und das rechte Feld zeigt eine Abdeckung dieses Gitters mit L-Plättchen, die in verschiedenen Farben dargestellt wurden. Ein L-Plättchen deckt drei Felder auf die angegebene Art ab. Die Farbe spielt keine Rolle.





   Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: jedes $2^n \times 2^n$-Gitter, bei dem ein beliebiges Feld entfernt wurde, kann mit L-Plättchen abgedeckt werden, so dass jedes Feld von genau einem L-Plättchen abgedeckt wird.

Aufgabe 2: induktive Definitionen und Induktionsbeweise (1)

Die Funktion Tf bildet jede Formel auf die Menge ihrer Teilformeln ab. Sie ist wie folgt induktiv definiert.

$$\mathrm{Tf}(\varphi) := \begin{cases} \{\varphi\}, & \text{falls } \varphi \text{ eine atomare Formel oder eine Konstante ist} \\ \{\varphi\} \cup \mathrm{Tf}(\alpha) \cup \mathrm{Tf}(\beta), & \text{falls } \varphi = (\alpha \wedge \beta) \text{ oder } \varphi = (\alpha \vee \beta) \\ \{\varphi\} \cup \mathrm{Tf}(\alpha), & \text{falls } \varphi = \neg\alpha \end{cases}$$

1. Finden Sie eine entsprechende induktive Definition für eine Funktion L, die die Länge aussagenlogischer Formeln angibt. Atomare Formeln und Konstanten können dabei die Länge 1 haben.

2. Beweisen Sie: für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt $|\mathrm{Tf}(\varphi)| \leq 2 \cdot L(\varphi)$.

3. Gilt auch $L(\varphi) \leq |\mathrm{Tf}(\varphi)|$? Wie lässt sich eine untere Schranke von $|\mathrm{Tf}(\varphi)|$ durch $L(\varphi)$ abschätzen?

Aufgabe 3: induktive Definitionen und Induktionsbeweise (2)

Die Funktion A von der Menge aller aussagenlogischen Formeln in die Menge der natürlichen

Zahlen gibt die Anzahl von Vorkommen atomarer Formeln und Konstanten in einer Formel an.

$$A(\varphi) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \varphi \text{ eine atomare Formel oder eine Konstante ist} \\ A(\alpha) + A(\beta), & \text{falls } \varphi = (\alpha \wedge \beta) \text{ oder } \varphi = (\alpha \vee \beta) \\ A(\alpha), & \text{falls } \varphi = \neg\alpha \end{cases}$$

1. Geben Sie eine entsprechende induktive Definition für eine Funktion L an, die die Länge aussagenlogischer Formeln bestimmt. Atomare Formeln und Konstanten können dabei die Länge 1 haben.

2. Beweisen Sie: für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt $A(\varphi) \leq \lceil \frac{L(\varphi)}{2} \rceil$.

Aufgabe 4: Negationsnormalform

Wir betrachten Formeln mit Atomen, $\bot$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$.
Beweisen Sie: Für jede Formel gibt es eine äquivalente Formel, in der $\neg$ nur direkt vor Atomen vorkommt.

Grundlegende Begriffe der Aussagenlogik

Aufgabe 5: gültig, erfüllbar, unerfüllbar

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Wenn α und β erfüllbar sind, dann ist ...
   (a) ... $\alpha \wedge \beta$ erfüllbar. (b) ... $\alpha \vee \beta$ erfüllbar.
   (c) ... $\alpha \rightarrow \beta$ erfüllbar. (d) ... $\neg\alpha$ erfüllbar.

2. Wenn α erfüllbar und β unerfüllbar ist, dann ist ...
   (a) ... $\alpha \wedge \beta$ unerfüllbar. (b) ... $\alpha \vee \beta$ erfüllbar.
   (c) ... $\alpha \rightarrow \beta$ unerfüllbar. (d) ... $\beta \rightarrow \alpha$ gültig.

3. Wenn α nicht gültig und β erfüllbar ist, dann ist ...
   (a) ... $\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$ erfüllbar. (b) ... α unerfüllbar.
   (c) ... $\neg\alpha$ erfüllbar. (d) ... $\neg\alpha \rightarrow \beta$ erfüllbar.

4. β ist gültig, wenn α und $\alpha \rightarrow \beta$ gültig sind.

Aufgabe 6: verschiedene Äquivalenzen

Beweisen Sie: für alle Formeln α und β gilt:

$$\alpha \equiv \beta \text{ genau dann, wenn } \alpha \leftrightarrow \beta \text{ gültig ist.}$$

Aufgabe 7: **adäquate Mengen von Verknüpfungen**

Die 2-stellige Verknüpfung NAND (dargestellt als $\downarrow$) ist definiert durch

$$\hat{\mathcal{A}}(\alpha \downarrow \beta) = 1 - \hat{\mathcal{A}}(\alpha) \cdot \hat{\mathcal{A}}(\beta).$$

Zeigen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel eine äquivalente Formel gibt, die nur Atome und das Verknüpfungszeichen $\downarrow$ enthält.

Aufgabe 8: $\{\leftrightarrow, \neg\}$ **ist nicht adäquat**

Aus einer aussagenlogischen Formel α entsteht die Formel $\alpha[i]$, indem man in α jedes Vorkommen von A_i durch $\neg A_i$ ersetzt. Beispiel: $(A_1 \wedge (\neg A_1 \leftrightarrow A_2))[1] = (\neg A_1 \wedge (\neg\neg A_1 \leftrightarrow A_2))$. Eine $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formel ist eine Formel aus Atomen, Konstanten und den Verknüpfungszeichen $\leftrightarrow$ und $\neg$.

1. Zeigen Sie: für jede $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formel φ und jedes i gilt $\varphi[i] \equiv \varphi$ oder $\varphi[i] \equiv \neg\varphi$.
2. Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ und ein i an, so dass $\varphi[i] \not\equiv \varphi$ und $\varphi[i] \not\equiv \neg\varphi$.
3. Folgern Sie daraus, dass es eine aussagenlogische Formel gibt, zu der keine $\{\leftrightarrow, \neg\}$-Formel äquivalent ist.

Aufgabe 9: **semantische Folgerung**

Die Formeln α und β haben keine gemeinsamen atomaren Formeln. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $\alpha \Vdash \beta$ (2) α ist unerfüllbar oder β ist gültig.

Modellierungen

Aufgabe 10: **Modellierung Knotenfärbung**

Ein (ungerichteter) Graph ist 3-färbbar, wenn man jeden Knoten des Graphen so mit einer von drei Farben färben kann, dass zwei Knoten, zwischen denen es eine Kante gibt, stets mit verschiedenen Farben gefärbt sind.
Geben Sie einen schnellen Algorithmus an, der als Eingabe einen Graph G erhält und als Ausgabe eine Formel $f(G)$ berechnet, so dass G dreifärbbar ist genau dann, wenn $f(G)$ erfüllbar ist. Der Algorithmus soll schnell sein (also polynomielle Rechenzeit haben).

Aufgabe 11: **Modellierung Sudoku**

Bei einem 2er-Sudoku ist das Ziel, ein $2^2 \times 2^2$-Gitter mit den Ziffern 1 bis 2^2 so zu füllen, dass jede Ziffer in jeder Spalte, in jeder Zeile und jedem der 2^2 2×2-Blöcke, mit denen man das $2^2 \times 2^2$-Gitter komplett abdecken kann, nur einmal vorkommt. Ausgangspunkt ist ein Gitter, in dem bereits mehrere Ziffern vorgegeben sind – wie im Beispiel unten.

Geben Sie einen schnellen Algorithmus an, der als Eingabe ein 2er-Sudoku erhält und eine Formel ausgibt, die genau dann erfüllbar ist, wenn es für das Sudoku eine Lösung gibt!
Bei einem $n$er-Sudoku ist auf entsprechende Weise ein $n^2 \times n^2$-Gitter mit Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$ zu füllen. Überlegen Sie sich, wie man Ihre Konstruktion für ein Sudoku beliebiger Größee modifizieren müsste!

1			
	2	1	
		3	
			4

Spielen mit Formeln

Aufgabe 12: etwas zum Knobeln

Eine Menge von Formeln ist erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt, die gleichzeitig alle Formeln in der Menge erfüllt.

1. Geben Sie Formeln α, β und γ an, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind!
   (a) Die Menge $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ist nicht erfüllbar.
   (b) Jede der Mengen $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \gamma\}$ und $\{\beta, \gamma\}$ ist erfüllbar.
2. Nun soll 1.) für eine beliebige Zahl $n \geq 3$ von Formeln verallgemeinert werden.
   Geben Sie für jedes $n \geq 3$ eine Menge $M_n = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ an, so dass
   (a) M_n nicht erfüllbar ist, aber
   (b) jede Teilmenge von M_n mit höchstens $n - 1$ Formeln erfüllbar ist!
3. Es sei $n \geq 3$ und M_n eine Formelmenge, die die Bedingungen (a) und (b) aus Aufgabenteil 2.) erfüllt. Wie viele verschiedene atomare Formeln müssen die Formeln aus M_n mindestens enthalten?

Aufgabe 13: kontextfreie Mengen von Tautologien

$\mathrm{TAUT}_\emptyset$ ist die Menge aller gültigen aussagenlogischen Formeln ohne Atome. Zum Beispiel gehört $(\bot \vee \neg(\bot \wedge \top))$ zu dieser Menge, und $\neg(\top \wedge (\top \vee \bot))$ gehört nicht dazu.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{TAUT}_\emptyset$ kontextfrei ist.
Welche größeren Teilmengen von TAUT sind ebenfalls kontextfrei?

Aufgabe 14: Baum-Klauselmengen

Binäre Bäume kann man als Mengen von Wörtern über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ wie folgt definieren.

1.) Die Menge mit dem leeren Wort $\{\varepsilon\}$ ist ein binärer Baum.

2.) Wenn L und R binäre Bäume sind, dann ist auch $B = \{0l \mid l \in L\} \cup \{1r \mid r \in R\}$ ein binärer Baum.

Z.B. ist $\{00, 01, 100, 101, 11\}$ ein binärer Baum.
Jedem binären Baum ist eine Menge von Klauseln zugeordnet. Jedes Wort im binären Baum beschreibt eine Klausel (Disjunktion von Literalen). Ein Wort $b_1 b_2 \ldots b_k$ beschreibt eine Klausel mit den Atomen $A_1, \ldots, A_k$, wobei A_i negiert vorkommt genau dann, wenn $b_i = 0$. Der oben angegebene binäre Baum beschreibt die Klauselmenge

$$\big\{\{\neg A_1, \neg A_2\}, \{\neg A_1, A_2\}, \{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}, \{A_1, \neg A_2, A_3\}, \{A_1, A_2\}\big\},$$

die folgende Formel darstellt:

$$(\neg A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2) \quad .$$

Lösen Sie die folgenden Aufgaben.

1. Geben Sie jeweils einen binären Baum mit 3, 4 bzw. 6 Elementen und die dadurch beschriebene Klauselmenge an.
2. Welche Klauselmenge wird durch den Baum $\{\varepsilon\}$ beschrieben?
3. Geben Sie direkt eine induktive Definition für die Klauselmengen an, die durch binäre Bäume beschrieben werden. Diese Klauselmengen nennen wir *Baum-Klauselmengen*.
4. Zeigen Sie: jede Baum-Klauselmenge ist unerfüllbar.
5. Zeigen Sie: wenn man aus einer Baum-Klauselmenge eine beliebige Klausel entfernt, dann ist die entstehende Klauselmenge erfüllbar.