Die Bogenlänge der Normalparabel über [0 ; 3]

$$l := \int_0^3 \sqrt{1 + 4\cdot x^2}\, dx = \int_0^3 1\cdot\sqrt{1 + 4\cdot x^2}\, dx$$

$$= x\cdot\sqrt{1 + 4\cdot x^2}\,\Big]_0^3 - \int_0^3 \frac{4\cdot x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + 4\cdot x^2}}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot l = x\cdot\sqrt{1 + 4\cdot x^2}\,\Big]_0^3 + \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cdot x^2}}\, dx$$

1. Trick: Partielle Integration mit einer multiplikativen 1 !
2. Trick: Addition von 0 (+ 1 - 1) im Zähler des Integrals und Zerlegung des Integrandenbruches reproduziert das Ausgangsintegral mit negativem Vorzeichen (nach Kürzen der Wurzel) !
3. Trick: Reproduziertes Integral nach links bringen und durch 2 teilen !

<u>Substitution:</u>

$$u = 2\cdot x + \sqrt{1 + 4\cdot x^2}$$

$$\Rightarrow \quad du = \left(2 + \frac{8\cdot x}{2\cdot\sqrt{1 + 4\cdot x^2}} \right) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \quad du \cdot \sqrt{1 + 4\cdot x^2} = 2\cdot\left(\sqrt{1 + 4\cdot x^2} + 2\cdot x \right) \cdot dx$$

$$= 2\cdot u \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cdot x^2}} \cdot dx = \frac{du}{2\cdot u}$$

$$l = \frac{1}{2}\left[x\cdot\sqrt{1 + 4\cdot x^2}\,\Big]_0^3 + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(2\cdot x + \sqrt{1 + 4\cdot x^2}\right)\Big]_0^3 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{1 + 4\cdot x^2} + \ln\left(\sqrt{2\cdot x + \sqrt{1 + 4\cdot x^2}}\right) \right)\Big]_0^3$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot\sqrt{37} + \frac{1}{2}\ln\left(6 + \sqrt{37}\right)\right) \approx 9{,}7471$$

Will man ohne die "üblen" Tricks auskommen muß man anders substituieren ! - Also - Neue Substitution:

$$x = \frac{1}{4}\cdot\left(e^{u} - e^{-u}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sinh(u)$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{4}\cdot\left(e^{u} + e^{-u}\right) \cdot du$$

Nun versuchen wir es im folgenden anders:

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + 4\cdot x^2}\, dx = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(6)} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cdot\left(e^{u} - e^{-u}\right)^2} \cdot \frac{1}{4}\cdot\left(e^{u} + e^{-u}\right) \cdot du$$

$$= \frac{1}{8}\cdot \int_0^{\operatorname{arcsinh}(6)} \sqrt{4 + e^{2u} - 2 + e^{-2u}} \cdot \left(e^{u} + e^{-u}\right) \cdot du$$

$$= \frac{1}{8}\cdot \int_0^{\operatorname{arcsinh}(6)} \sqrt{e^{2u} + 2 + e^{-2u}} \cdot \left(e^{u} + e^{-u}\right) \cdot du = \frac{1}{8}\cdot \int_0^{\operatorname{arcsinh}(6)} \left(e^{u} + e^{-u}\right)^2 \cdot du$$

$$= \frac{1}{8}\cdot \int_0^{\operatorname{arcsinh}(6)} \left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right) \cdot du = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot e^{2u} + 2\cdot u - \frac{1}{2}\cdot e^{-2u}\right]_0^{\operatorname{arcsinh}(6)}$$

Die Auflösung unserer Substitutionsgleichung nach **u** führt zunächst zu einer quadratischen Gleichung in e^u :

$$4\cdot x = e^{u} - \frac{1}{e^{u}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{u}\right)^2 - 1 = 4\cdot x \cdot e^{u}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{u}\right)^2 - 4\cdot x \cdot e^{u} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{u} = 2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad u = \ln\left(2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}\right)$$

(Die 2. Lösung der quadratischen Gleichung spielt keine Rolle, weil für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt: $e^u > 0$!)

Damit ist: $$\operatorname{arcsinh}(6) = \ln\left(6 + \sqrt{37}\right) \approx 2{,}4918$$

Zur Identifikation der Stammfunktionsterme wird eingesetzt:

$$\frac{1}{4}\cdot u + \frac{1}{16}\cdot\left(e^{2u} - \frac{1}{e^{2u}}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\cdot \ln\left(2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}\right) + \frac{1}{16}\cdot\left[\left(2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}\right)^2 - \frac{1}{\left(2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}\right)^2}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\cdot \ln\left(\sqrt{2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} \cdot \left[\left(2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}\right)^2 - \frac{1}{\left(2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}\right)^2}\right] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\sqrt{2\cdot x + \sqrt{4\cdot x^2 + 1}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(x \cdot \sqrt{4\cdot x^2 + 1}\right)$$

(Ein bißchen Rechnung muß schon sein !)

Die Bogenlänge der Normalparabel über [0 ; 3]

Für alle, die zu faul zum Rechnen sind:

$$\frac{1}{8} \cdot \left[\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)^2 - \frac{1}{\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)^4 - 1}{\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{16x^4 + 4 \cdot 8x^3 \cdot \sqrt{4x^2+1} + 6 \cdot 4x^2 \cdot \left(4x^2+1\right) + 4 \cdot 2x \cdot \left(4x^2+1\right) \cdot \sqrt{4x^2+1} + \left(4x^2+1\right)^2 - 1}{\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{128x^4 + 64x^3 \cdot \sqrt{4x^2+1} + 32x^2 + 8x \cdot \sqrt{4x^2+1} + 1 - 1}{8x^2 + 4x \cdot \sqrt{4x^2+1} + 1} \right]$$

$$= 1 \cdot \left[\frac{16x^4 + 8x^3 \cdot \sqrt{4x^2+1} + 4x^2 + x \cdot \sqrt{4x^2+1}}{8x^2 + 4x \cdot \sqrt{4x^2+1} + 1} \right]$$

$$= 1 \cdot \left[\frac{\left(8x^2 + 4x \cdot \sqrt{4x^2+1} + 1\right) \cdot \left(x \cdot \sqrt{4x^2+1}\right)}{\left(8x^2 + 4x \cdot \sqrt{4x^2+1} + 1\right)} \right]$$

$$= 1 \cdot \left[x \cdot \sqrt{4x^2+1} \right]$$

qed.