1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

.... Gruppe

.... Zusammengearbeitet mit

Lineare Algebra I – Blatt 9

Abgabe am 21.12.2016 in der Vorlesung

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Alle Antworten sind zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie die entsprechenden Nummern an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(a) Bestimmen Sie den Rang der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, z + x)$

(b) Geben Sie Basen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 von $\mathbb{R}^3$ an, für die die Aussage aus Satz 4.1.11 (für die Abbildung aus (a)) erfüllt ist, d. h. $f(v_i) = w_i$ falls $i \leq \operatorname{rk} f$ und $f(v_i) = 0$ sonst.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei K ein Körper und seien V und W K-Vektorräume. In der Vorlesung wurde behauptet (Bemerkung 4.1.12) aber nicht bewiesen, dass $\operatorname{Hom}(V, W)$ auch ein K-Vektorraum ist, mit punktweiser Vektoraddition und punktweiser Skalarmultiplikation.

(a) Machen Sie eine Liste der Dinge, die zu zeigen sind.

(b) Zeigen Sie exemplarisch die Existenz additiver Inverser und $(rs)f = r(sf)$ für $r, s \in K$, $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

Aufgabe 3 (1+2 Punkte):

Seien $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineare Abbildungen mit $\operatorname{rk} f = 2$ und $\operatorname{rk} g = 2$.

Bestimmen Sie den minimal möglichen und den maximal möglichen Rang von $g \circ f$. Genauer:

(a) Was ist der minimale und maximale Rang nach Satz 4.1.9 aus der Vorlesung?

(b) Geben Sie jeweils ein Beispiel von Abbildungen f und g an so dass $g \circ f$ diesen minimalen bzw. maximalen Rang hat.

Aufgabe 4 (3+1+1+2 Punkte):

(a) Geben Sie an, welche der 9 Matrix-Produkte AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC (laut Vorlesung) definiert sind (ohne Begründung) und bestimmen Sie diejenigen, die definiert sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass $AB \neq BA$ gilt. Was bedeutet „$AB \neq BA$“ für die zugehörigen linearen Abbildungen?

(c) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an mit $A \neq I_2$ aber $AA = I_2$. Was bedeuten diese Bedingungen für die zugehörige lineare Abbildung?

(d) Zeigen Sie, dass es keine Matrizen $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ gibt mit $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Satz 4.1.9 kann nützlich sein.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.