Aufgabe 8.4 (30 Punkte)**.** Die Fakultät einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist rekursiv definiert als

$$1! := 1 \quad \text{und} \quad (n+1)! := n! \cdot (n+1) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k \leq 1$ definiere die Binomialkoeffizienten als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dabei verabreden wir, dass $0! = 1$. Dann ist etwa $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.

a) Zeigen Sie, dass $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

   Hinweis: Das geht ohne Induktion.

b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Hinweis: Induktion nach n. Im Induktionsschritt erhalten Sie zwei Summen. Überlegen Sie, welc Summanden zusammengefasst werden können. Versuchen Sie ggf. die Formel für $n = 2, 3, 4$ expli auf.