Wahrscheinlichkeitsrechnung in Videospielen

Mathe-Artikel

4. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Wer hätte gedacht, dass der beliebte Videospiel-Klassiker **„Banjo und Kazooie“** aus dem Entwicklerhaus **Rare** fast **19 Jahre** nach seinem Erscheinen zum **„Mathe machen“** motivieren würde? [1] Ich als damals 5-Jähriger konnte das natürlich **nicht ahnen**. Und nun sitze ich hier und schreibe diesen Artikel, um zu zeigen, wie auch das **populäre Unterhaltungsmedium „Videospiele“ didaktisch wertvoll** zum Einsatz kommen kann.

2 Das Problem

Für unsere Überlegungen betrachten wir das im folgenden Video gezeigte **Szenario** (ab 10:27 bis 11:24) $\longrightarrow$ Pyramiden-Memory

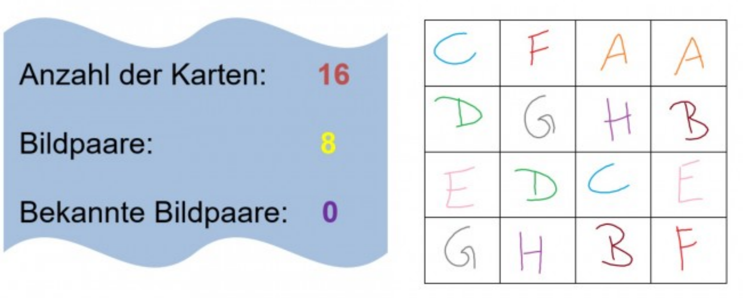
Ziel des Spiels ist das Einsammeln von **Jiggies**, die man als **Belohnung** für das **Lösen unterschiedlicher Rätsel** erhält. In diesem Fall musste das **Pyramiden-Memory** innerhalb des **vorgegebenen Zeitlimits** gelöst werden. Da die **Bildpositionen** in allen **Spielkopien** und **Speicherständen gleich** sind, kann man diese Aufgabe durch **simples Auswendiglernen** der **Lösung ohne einen einzigen Fehler** schaffen. Wie verhält es sich aber, wenn der Spieler die **Positionen nicht kennt**?

Fragestellung 1

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in diesem Fall ohne einen Fehler Erfolg haben wird?

3 Die Lösung

Sei **X** die **Anzahl der Fehler**, die im Spielverlauf **vor erfolgreichem Beenden des Memorys** gemacht werden. Die **Bildpositionen** seien zudem **nicht bekannt**. Wir suchen also: $P(X = 0)$. Fassen wir die für unsere Berechnungen **relevanten Parameter** in einer kurzen **Übersicht** zusammen:



Am Anfang ist es **unerheblich**, **welche Karte** wir aufdecken, weil noch **kein Fehler** gemacht werden kann. Da jedoch nun eine **konkrete Karte** aufgedeckt wurde, muss das **dazu passende Gegenstück** unter den verbliebenen **16-1 = 15 Karten zufällig** gefunden werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt

$$\frac{1}{15}$$

Jetzt befinden wir uns wieder in der Situation, dass eine ausgewählte Karte noch **zu keinem Fehler führen kann**, denn schließlich ist die **Reihenfolge**, in der die Bildpaare aufgedeckt werden, **nicht relevant**. Im nächsten Schritt ist dann allerdings wieder aus den verbliebenen **16-1-1-1=13 Karten** das zum zuvor aufgedeckten Bild **passende Pendant zu finden**. Die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges ist dabei $\frac{1}{13}$. Dieser Gedankengang wird **so lange fortgesetzt**, bis **keine Karten** mehr aufzudecken sind.

$$\underbrace{\frac{16}{16}}_{=1} \cdot \frac{1}{15} \cdot \underbrace{\frac{14}{14}}_{=1} \cdot \frac{1}{13} \cdot \underbrace{\frac{12}{12}}_{=1} \cdot \frac{1}{11} \cdot \underbrace{\frac{10}{10}}_{=1} \cdot \frac{1}{9} \cdot \underbrace{\frac{8}{8}}_{=1} \cdot \frac{1}{7} \cdot \underbrace{\frac{6}{6}}_{=1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\frac{4}{4}}_{=1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{10321920}{16!} \tag{1}$$

Das entspricht einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2027025} \approx 0.00000049$. Ich als Mathematiker habe mir direkt nach der Lösung dieses Problems die Frage gestellt, wie die Wahrscheinlichkeit wohl für insgesamt n Karten mit $\frac{n}{2}$ Bildpaaren aussieht. Wenn wir den vorherigen **Gedankengang adaptieren**, erhalten wir **folgende Formel**:

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n-2} \cdot \frac{1}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{n!} \cdot \prod_{k=1}^{0.5n} 2k \tag{2}$$

André, savest8

4 Quellenverzeichnis

[1] https://www.gamerpedia.de/Banjo-Kazooie (29.01.2017)