Übungen Lineare Algebra I, WS 2015/16 **Blatt 4**
Prof. Dr. J. Kohlhaase
Abgabe: 23.11.2015 bis 27.11.2015 in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 1 (4 Punkte): Betrachten Sie die Permutationen $\sigma, \tau \in S_5$ gegeben durch

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Notieren Sie $\sigma\tau$ ebenfalls in der obigen Schreibweise. Ermitteln Sie durch Zählen die Längen von σ, τ und $\sigma\tau$. Überprüfen Sie in diesem konkreten Beispiel nochmals die Gültigkeit der Gleichung $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$.

Bemerkung: Beachten Sie, dass in diesem Fall $\ell(\sigma\tau) \neq \ell(\sigma) + \ell(\tau)$ gilt. Die Tatsache, dass sgn *ein Gruppenhomomorphismus ist, ist daher keine unmittelbare Konsequenz der Eigenschaften der Länge.*

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Mit 0 bezeichnen wir das Nullelement von R. Ist R ein Ring mit Eins, so bezeichnen wir mit 1 sein Einselement. Ist $r \in R$, so bezeichnen wir mit $-r$ das additive Inverse von r. Zeigen Sie:

(i) Für alle $r \in R$ gilt $r \cdot 0 = 0 \cdot r = 0$.

(ii) Ist R ein Ring mit Eins, so gilt $(-1) \cdot r = r \cdot (-1) = -r$ für alle $r \in R$. Insbesondere gilt $(-1) \cdot (-1) = 1$.

(iii) Ist R ein Körper, so ist R ein Integritätsbereich.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen und $m \in \mathbb{Z}$. Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ sei definiert durch $n \sim \ell \;:\Longleftrightarrow\; n - \ell \in m\mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $[n] := \{\ell \in \mathbb{Z} \mid n \sim \ell\} = n + m\mathbb{Z}$ die zugehörige Äquivalenzklasse. In Satz 1.16 der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/\!\sim := \{[n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ein Ring ist mit Addition $[n_1] + [n_2] := [n_1 + n_2]$ und Multiplikation $[n_1] \cdot [n_2] := [n_1 n_2]$.

(i) Es gelte $m \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über die Division mit Rest, dass die Menge $S := \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n < |m|\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}$ bezüglich $\sim$ im Sinne von Definition 0.18 (iv) der Vorlesung ist. Folgern Sie, dass $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = |m|$ gilt. Wie lautet im Fall $m = 5$ die eindeutig bestimmte natürliche Zahl n mit $0 \leq n < 5$ und $[99]^{99} = [n]$?

(ii) Es gelte $m \geq 2$. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nicht nullteilerfrei ist, wenn m keine Primzahl ist. Insbesondere ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in diesem Fall kein Körper. Ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein Körper, wenn $m \in \{0, 1\}$?

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Wie in der Vorlesung bezeichne $R[t] := \{(r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}} \mid r_i = 0 \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller R-wertigen Folgen, die nur endlich viele von Null verschiedene Einträge haben. Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $R[t]$ seien definiert durch

$$R[t] \times R[t] \longrightarrow R[t]$$

$$+ \quad = \quad (((r_i)_{i\in\mathbb{N}}, (s_i)_{i\in\mathbb{N}}) \longmapsto (r_i + s_i)_{i\in\mathbb{N}})$$

$$\cdot \quad = \quad (((r_i)_{i\in\mathbb{N}}, (s_i)_{i\in\mathbb{N}}) \longmapsto (t_i)_{i\in\mathbb{N}})$$

mit $t_i := \sum_{j=0}^{i} r_j s_{i-j}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) $(R[t], +, \cdot)$ ist ein Ring mit Nullelement $0 = (0, 0, 0, 0, \ldots)$ und Einselement $1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$.

(ii) Die Abbildung $\iota = (r \mapsto (r, 0, 0, 0, \ldots)) : R \to R[t]$ ist ein injektiver Ringhomomorphismus. Über ι identifizieren wir R mit einem Unterring von $R[t]$, d.h. wir schreiben nur r anstelle von $\iota(r)$. Zeigen Sie $r \cdot (r_i)_{i\in\mathbb{N}} = (rr_i)_{i\in\mathbb{N}}$ für alle $r \in R$ und $(r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in R[t]$.

(iii) Das Element $t \in R[t]$ sei definiert als $t := (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$. Zeigen Sie, dass für $i \in \mathbb{N}$ das Element t^i gegeben ist durch $t^i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_{ii} = 1$ und $\delta_{ij} = 0$ für alle $j \neq i$. Folgern Sie, dass für $(r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in R[t]$ stets $(r_i)_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i t^i$ gilt.