Florian Häusler

Indirekter Beweis und konstruktives Vorgehen beim Beweisen

1. Indirekter Beweis

1.1 Einführungsbeispiel

Der indirekte Beweis von mathematischen Lehrsätzen ist oft bei Schülern (und Lehrern) unbeliebt oder gar gefürchtet, da er häufig von Verständnisschwierigkeit begleitet ist. Dies mag überraschen, wenn man bedenkt, daß der indirekte Beweis auch im Alltag verwendet wird, und zwar ohne irgend welche Verständnisschwierigkeiten. Ein Beispiel:
Herr X steht vor Gericht. Der Staatsanwalt liest die Anklageschrift vor: „....Herr X hat am 6. 10. 1996 zwischen 23.00 und 23.15 Uhr im Juweliergeschäft Y einen Einbruch verübt. .....“ Diese Aussage kann sich in der Verhandlung (z. B. durch Zeugen) als wahr erweisen, und Herr X wird dann verurteilt. Der Staatsanwalt wird versuchen, seine Aussage irgendwie zu beweisen.
Herr X behauptet: „Ich habe den Einbruch nicht begangen.“ Auch Herr X wird versuchen, seine Aussage zu beweisen, um freigesprochen zu werden. Dabei hat er Glück. Zu der fraglichen Zeit war er nämlich mit mehreren Freunden zusammen. Er sagt also zu seiner Verteidigung: „Wenn ich den Einbruch begangen hätte, dann hätte ich am 6. 10. zwischen 23.00 und 23.15 Uhr im Juweliergeschäft Y sein müssen. Da ich aber nachweislich an einem anderen Ort war, kann ich nicht der Täter sein.“
Dieser leicht verständliche „Alibibeweis“ ist nichts anderes als ein indirekter Beweis. Wer dieses Beispiel versteht, sollte auch bei indirekten mathematischen Beweisen keine Verständnisschwierigkeiten haben.

1.2 Einige Grundlagen der Aussagenlogik

Bevor wir uns die logische Struktur eines indirekten Beweises näher anschauen werden, sollen einige Grundtatsachen der Aussagenlogik (die teilweise vielleicht schon bekannt sind) kurz dargestellt werden.

Eine Aussage ist für uns ein (sprachlicher) Satz, dessen Sinn wahr oder falsch sein kann. Die Verneinung oder **Negation** einer Aussage A wird in der Literatur unterschiedlich mit $\overline{A}$ oder $\neg A$ oder $\sim A$ bezeichnet. Es gilt die einfache **Wahrheitstafel**:

A	**ØA**
wahr	falsch
falsch	wahr

Für die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ verwenden wir künftig w und f.

Zwei Aussagen A und B können zusammengesetzt werden. Wir betrachten die Verknüpfungen „$\wedge$“ und „$\vee$“. $A \wedge B$ wird „A und (zugleich) B“, $A \vee B$ wird „A oder B“ gelesen. „Oder“ wird dabei nicht in einem ausschließenden Sinn gebraucht. Es gelten die folgenden Wahr -

heitstafeln:

A	**B**	**AÚB**
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	**B**	**AÙB**
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Für die äußerst einfach zusammengesetzte Aussage $A \vee \neg A$ gilt die nebenstehende Wahrheitstafel.
Diese Aussage ist in unserer Aussagenlogik stets wahr.
Man spricht auch vom **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

Andrerseits ist deshalb die Aussage A Ù **ØA stets falsch.** Eine Logik, in der der Wahrheitsgehalt einer Aussage nur zwei Werte (z. B. wahr und falsch) annehmen kann, wird als **zweiwertige Logik** bezeichnet. Es muss darauf hingewiesen werden, dass bei physikalischen Vorgängen im atomaren Bereich eine zweiwertige Logik nicht verwendet werden kann, auch wenn dies aller menschlicher Anschauung zu widersprechen scheint.

Nun betrachten wir die Aussageform $A \Rightarrow B$ („aus A folgt B“):

$A \Rightarrow B$ ist die Schreibweise für einen Lehrsatz, bei dem wir A als **Voraussetzung** und B als **Behauptung** bezeichnen. Auch dafür gibt es eine Wahrheitstafel, die in der Schulmathematik kaum Verwendung findet, da wir einen Lehrsatz ja nur dann verwenden, wenn die Voraussetzung A wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Gleichwertig mit der Aussageform A Þ B ist die Aussageform ØB Þ ØA.
$\neg B \Rightarrow \neg A$ wird als **Kontraposition** von $A \Rightarrow B$ bezeichnet. Es gilt:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Durch Vergleich der beiden Wahrheitstafeln läßt sich die Gleichwertigkeit leicht erkennen.

$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
f	f	w
w	f	f
f	w	w
w	w	w

Siehe auch Meyer [1] ab Seite 37 in diesem Heft.

1.3 Die logische Struktur indirekter Beweise

Wenn A eine Aussage oder Aussageform ist, nennen wir $A \wedge \neg A$ einen **Widerspruch**. Wenn „$A \Rightarrow$ Widerspruch“ gilt, so ist die Aussage A falsch.
Der zu beweisende Satz sei nun in eine Voraussetzung A und eine Behauptung B getrennt

und implikativ formuliert (Wenn ....., dann). A kann aus mehreren Teilvoraussetzungen und B kann aus mehreren Teilbehauptungen bestehen.

Die Struktur eines indirekten Beweises kann man nun so beschreiben:

Satz:	**A Þ B**
Gegenannahme:	**ØB**
Beweis:	**Man zeigt, dass „(AÙØB) Þ Widerspruch“ gilt.**
	Da A als wahr angenommen wird, ist folglich ØB falsch, und damit ist B wahr. Wenn A als wahr angenommen wird, und B als wahr bewie-sen, dann ist auch der Satz A Þ B wahr.

Ziel eines indirekten Beweises ist es also, aus den Voraussetzungen eines Satzes (wozu natürlich auch vieles gehört, das nicht extra aufgeführt wird, z.B. Axiome oder bereits bewiesene Folgerungen) **und** der Gegenannahme einen Widerspruch herzuleiten und zwar einen Widerspruch

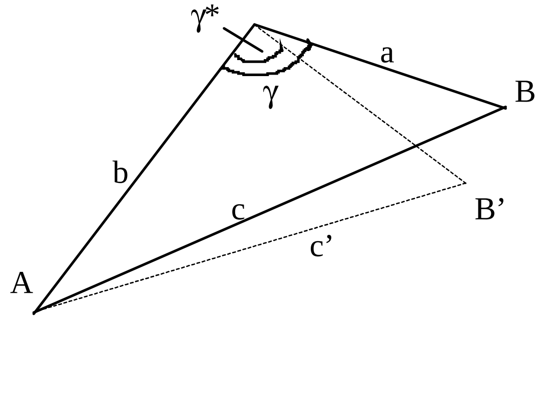
a) zur Voraussetzung A *oder*
b) zu einem Axiom, einer Definition oder zu der als wahr angenommenen Gegenannahme *oder*
c) zu einem bewiesenen Satz oder einer bereits hergeleiteten Folgerung.

Indirekte Beweise kann man häufig zum Beweis der Umkehrung eines bereits bewiesenen Satzes verwenden. Auch bei negierten Existenzaussagen („Es gibt keine natürliche Zahl, für die ......“) kann der Widerspruch-Beweis einfacher als der direkte Beweis sein.
Eine allgemeine Regel, wann ein indirekter Beweis kürzer oder leichter als ein direkter ist, kann man jedoch nicht aufstellen.

1.4 Beispiele

Wir wollen zunächst zwei Beispiele betrachten. Beim ersten wird sich ein Widerspruch zu einer Teilvoraussetzung ergeben, beim zweiten zu einem Axiom.

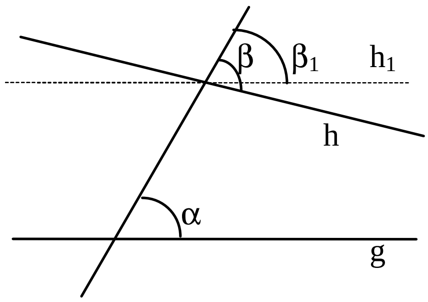
a) Der Lehrsatz des Pythagoras wird gewöhnlich in der Form zitiert, dass im Dreieck ABC aus „$\gamma = 90°$“ folgt: „$a^2+b^2 = c^2$“, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit γ als rechter Winkel angenommen wird. Wir wollen den Kehrsatz untersuchen:
Wenn im Dreieck ABC $a^2+b^2 = c^2$ gilt, dann ist g **= 90°.**
Gegenannahme: $\gamma \neq 90°$
Beweis:



Wir tragen in C einen rechten Winkel γ^* an mit [CA als Schenkel. k(C; r = a) schneide den anderen Schenkel von γ^* in B’.
Für das Dreieck AB’C gilt nach dem ursprünglichen Satz: $a^2+b^2 = c'^2$ mit $c' = \overline{AB'}$ und $a = \overline{CB'}$.
Da aber auch nach Voraussetzung $a^2+b^2 = c^2$ ist, muss c = c’ sein. B und B’ liegen also auf einem Kreis und haben von A gleichen Abstand.

Deshalb muss A der Kreismittelpunkt sein. Nach Voraussetzung ist aber C der Kreismittelpunkt. Also gilt A = C. Dies bedeutet, dass das Dreieck ABC kein „echtes" Dreieck ist, was wir aber als selbstverständlich voraussetzen. ⇒ Widerspruch.

b) α und β seien zwei Stufenwinkel, g und h die zwei dazugehörenden Geraden einer Ebene. Es gilt der Satz: Wenn $\alpha = \beta$ gilt, dann sind g und h parallel.
Wir wollen wieder den Kehrsatz betrachten:
Wenn a **und** b **zwei Stufenwinkel sind (V_1), und g und h parallel sind (V_2), dann gilt** a = b**.**
Gegenannahme: $\alpha \neq \beta$ (GA)
Beweis: $V_1 \wedge GA \Rightarrow$ Es gibt durch B eine Gerade h_1 ($\neq$h), so dass für den zu α gehörigen Stufenwinkel β_1 gilt:
$\alpha = \beta_1 \Rightarrow g \parallel h_1 \Rightarrow$ Zur Geraden g gibt es durch B zwei verschiedene Parallelen h und h_1. Andrerseits gilt das Parallelenaxiom, das diesen Sachverhalt verbietet.
⇒ Widerspruch.



1.5 Weitere Aufgaben

1. Wenn ein Winkel im Dreieck 120° misst, dann ist das Dreieck nicht rechtwinklig.
2. Ein Viereck mit verschieden langen Diagonalen ist kein Rechteck.
3. In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.
4. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.
5. Wenn die letzte Ziffer einer Zahl 2, 3, 7 oder 8 ist, dann ist sie keine Quadratzahl.
6. Ist n^2 eine gerade Zahl, so ist auch n gerade.
7. Die Summe s = (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + 1000) kann für keine natürliche Zahl n eine Primzahl sein.
8. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

2. Konstruktives Vorgehen beim Beweisen

2.1 Was bezeichnen wir als „konstruktives Vorgehen" beim Beweisen?

Der Begriff „Konstruktion" wird in der Schulmathematik gewöhnlich nur in der Geometrie bei sogenannten Konstruktionsaufgaben verwendet. Was macht man beim Konstruieren eigentlich? Man verwendet einige bekannte Lösungen von „Grundaufgaben", die man „zusammenfügt", „zusammensetzt". Das lateinische ***construere*** bedeutet ***zusammensetzen***, ***zusammenfügen***.

Nun kann man aber auch in anderen mathematischen Gebieten einfache grundlegende Tatsachen zu einem „Konstrukt" zusammenfügen. Natürlich verläuft der Beweis eines

Satzes A $\Rightarrow$ B auch durch logisches Aneinanderfügen von Axiomen, Sätzen und einfachen, bereits bekannten Tatsachen. Wir wollen uns aber insbesondere solchen Beweisen zuwenden, bei
denen ein einfacher Schritt mehrfach (auch beliebig oft) wiederholt wird. Auch der Nachweis für die Gültigkeit einer Formel kann dazu gehören.

Ein kleines Beispiel:
Jemand legt auf einem Sparkonto 500 DM bei einem Zinssatz von 4% an und hebt die Zinsen nicht ab. Nach einem Jahr hat er 500 DM · 1,04 = 510 DM, nach zwei Jahren 510 DM ·1,04 = 530,40 DM, nach drei Jahren 530,40 DM · 1,04 = 562,43 DM usw.
Der einfache sich wiederholende Schritt ist also die Multiplikation mit 1,04. Will man das Kapital mit Zins und Zinseszins in Abhängigkeit der Anlagedauer angeben, so erhält man
$K(t) = 500\text{ DM} \cdot 1{,}04^t$ (t ist die Anlagedauer in Jahren) oder, falls man ein beliebiges Anfangskapital K berücksichtigen will: $K(t) = K \cdot 1{,}04^t$. Mit diesem einfachen Aneinanderreihen des gleichen Vorgangs hat man also eine Formel konstruiert und sie damit auch bewiesen.

Es kann auch geschehen, dass man beim Experimentieren z.B. mit Hilfe eines Computers durch einfache, sich mehrfach wiederholende Schritte zu neuen überraschenden Ergebnissen gelangt, deren Existenz allein schon durch die Konstruktion bewiesen wird. Andrerseits kann es schwierig sein, zu einer gegebenen Formel oder zu einem anderen mathematischen Sach-verhalt ein einfaches konstruktives Vorgehen zum Nachweis zu finden. Wir werden nun einige verschiedenartige Beispiele betrachten.

2.2 Konstruktives Vorgehen in der Geometrie

Die methodischen Prinzipien zur Lösung geometrischer Aufgaben wurden bereits von den Griechen mustergültig entwickelt, lediglich die Strenge der Beweisführung wurde ständig verschärft. Das äußere Schema einer Beweisführung ist in ***Voraussetzung, Behauptung, Beweis*** gegliedert.
Bei einer Konstruktionsaufgabe weicht die Formulierung in der Regel von diesem Schema ab. Ein Beispiel:
Konstruiere (mit Zirkel und Lineal) ein Dreieck aus $\alpha = 45°$, $a = 8$ und $b = 10$.
Diese Aufgabe lässt sich jedoch auch als Satz formulieren, der zu beweisen ist:
Wenn von einem Dreieck die Bedingungen $\alpha = 45°$, $a = 8$ und $b = 10$ gegeben sind, dann lässt sich das Dreieck (mit Zirkel und Lineal) konstruieren.

Bei der Lösung geometrischer Aufgaben halten sich die Mathematiker seit der Antike an folgendes Schema:
1. **Analysis**
2. **Konstruktion**
3. **Beweis**
4. **Determination**

In der **Analysis** (Auflösung der Aufgabe) wird zunächst angenommen, dass die Aufgabe wenigstens eine Lösung hat. Aus dieser Annahme werden rückschließend eine Reihe von bekannten Beziehungen hergeleitet, die für eine **Konstruktion** der Lösung notwendig sind. Der **Beweis** schließlich zeigt, dass die gefundenen notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, womit die Konstruktion tatsächlich auf die Lösung führt.

Der griechische Mathematiker Pappos (etwa 300 n.Chr.) schreibt: „Man nehme das Gesuchte an, als ob es schon verwirklicht wäre. Daraus ziehe man Schlüsse, so lange bis man beim Gegebenen anlangt. Schließlich versuche man die Schlüsse umzukehren und so vom Gegebenen zum Gesuchten zu kommen."

Aber Vorsicht! Aus der Annahme, dass es eine Lösung gibt, können natürlich keine hinreichenden Bedingungen für eine Lösung gewonnen werden, da durch die Annahme nicht gesichert ist, dass eine Lösung existiert.
Die abschließende **Determination** untersucht dann, wie viele Lösungen möglich sind.

In der Schulmathematik wird die Analysis gewöhnlich mit einer Überlegungsfigur durchgeführt. Die anschließende Konstruktion dient als solche gleich als Beweis der Existenz. Bei den Schulbuchaufgaben ist die Aufgabe meist so gestellt, dass es nur eine Lösung gibt. Ein extra Hinweis auf eine abschließende erforderliche Determination ist deshalb meist nicht nötig.

Aufgaben:
1. In dem oben angeführten Beispiel ist eine Determination nötig.
   Woran erkennt man dies sofort ohne eine weitere Überlegungsfigur?
2. Überlege dir geometrische Konstruktionsaufgaben, bei denen eine Determination nötig ist.
3. Gib Beispiele für geometrische Konstruktionsaufgaben an, bei denen keine Determination nötig ist, da nur eine einzige Lösungsmöglichkeit besteht.

2.3 Berechnung von $\sqrt{18}$ nach Heron

Unter $\sqrt{18}$ versteht man diejenige positive Zahl, deren Quadrat 18 ist, also $\sqrt{18}^{\,2} = 18$. Zunächst kann man durch einen einfachen indirekten Beweis zeigen, dass $\sqrt{18}$ **nicht rational** ist. Außerdem kann man durch einfache geometrische Überlegungen eine Strecke mit $\sqrt{18}$ als Längenmaßzahl konstruieren. Damit ist die **Existenz** von $\sqrt{18}$ als reelle Zahl gesichert. Der Taschenrechner liefert $\sqrt{18}$ = 4,242640687. Da $\sqrt{18}$ keine rationale Zahl ist, muss ein unendlicher nicht periodischer Dezimalbruch vorliegen. Wenn noch mehr Dezimalstellen angegeben werden, kann auch mit dem Taschenrechner nicht mehr die Richtigkeit der angegebenen Zahl überprüft werden, da Rundungsfehler dies verhindern würden.
Wir werden zur Bestimmung von beliebig vielen Dezimalstellen ein Verfahren anwenden, das auf den griechischen Mathematiker **Heron** zurückgeht. Wir machen dazu folgende Überlegung:
Wenn wir über der Strecke mit der Maßzahl $\sqrt{18}$ ein Quadrat zeichnen, so hat dies den Inhalt 18 Flächeneinheiten. Wir versuchen nun schrittweise Annäherungen an dieses Quadrat durch flächengleiche Rechtecke, deren Seitenlängen möglichst gleich lang werden sollen.
Der erste grobe **Schätzwert** für eine Seitenlänge sei **4**. Dann berechnet sich die dazugehörige andere Seite zu 18:4 = **4,5**. Beide Seiten sind verschieden lang.
Für die **erste Näherung** nehmen wir den Mittelwert von 4 und 4,5, also (4 + 4,5):2 = **4,25**. Die zweite Seitenlänge berechnen wir wieder 18:4,25 = **4,23529411**.... Wieder sind beide Seiten verschieden lang, aber ihr Längenunterschied ist geringer geworden.

Für die **zweite Näherung** nehmen wir den Mittelwert von 4,25 und 4,23529411...also **4,24264705**...
Die zweite Seitenlänge ergibt sich zu 18:4,242647... = **4,24263431**...

Alle weiteren Näherungen ergeben sich nach dem gleichen Schema:
1. Schritt: Der Mittelwert der beiden letzten Seitenlänge ergibt eine neue Seitenlänge.
2. Schritt: 18 dividiert durch diese neue Seitenlänge ergibt die zweite neue Seitenlänge.
3. Schritt: Mit den beiden neuen Seitenlängen beginnt man wieder beim ersten Schritt.

Ein Verfahren bei dem die gleichen Rechenschritte immer wieder durchgeführt werden, nennt man ein **Iterationsverfahren**.

In übersichtlicher Form erhalten wir unter Verwendung eines Taschenrechners:

Schritt	Länge der 1. Seite	Länge der 2. Seite	Mittelwert	| Seitendifferenz |
n = 0	s_0 = 4	18:s_0 = 4,5	4,25	0,25
n = 1	s_1 = 4,25	18:s_1 = 4,235294118	4,242647059	0,0147
n = 2	s_2 = 4,242647059	18:s_2 = 4,242634315	4,242640687	0,0000127
n = 3	s_3 = 4,242640687	18:s_3 = 4,242640687	4,242640687	0,00000000001(?)

Da sich ab jetzt die Längen und die Mittelwerte durch den Taschenrechner nicht mehr genauer angeben lassen, bricht das Verfahren hier ab. Wir wissen zumindest, dass die ersten acht Stellen nach dem Komma gültig sind, da sie sich im weiteren Verlauf nicht mehr ändern.
Die beiden Seiten der Rechtecke nähern sich in ihren Längen immer mehr an, nähern sich also immer mehr der gesuchten Länge. (Dies müsste natürlich noch exakt bewiesen werden.)
Um nun noch mehr gültige Dezimalstellen zu erhalten, wären wir gezwungen, schriftlich weiter zu rechnen oder einen entsprechend gerüsteten Computer zu verwenden.

Die **Iterationsformel** lautet: $\boxed{s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + \frac{18}{s_n})}$ n = 0, 1, 2, ... s_o ist der erste Schätzwert.

Aufgaben:
1. Nimm für die Berechnung von $\sqrt{18}$ nach Heron (mit dem Taschenrechner) die Anfangswerte 10, 1000 und -100. Was fällt auf?
2. Berechne nach dem Verfahren von Heron $\sqrt{200}$ mit verschiedenen Anfangswerten.

2.4 Kettenbrüche

Der Begriff „Kettenbruch“ und die Anwendungen von Kettenbrüchen sind heute in der Schulmathematik fremd. Noch vor hundert Jahren waren Kettenbrüche aber in Schulbüchern zu finden. Kettenbrüche gehen auf die Identität
$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$ zurück. Ein Beispiel: $\frac{43}{19} = 2 + \frac{5}{19} = 2 + \frac{1}{\frac{19}{5}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{5}{4}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$.

Diese Schreibfigur nennen wir einen **Kettenbruch** und schreiben dafür kürzer [2,3,1,4].

Wir haben hier auch ein schönes Beispiel für eine *Konstruktion*, die sich aus der einfachen Anwendung der oben erwähnten Identität ergibt.
Aus dem gezeigten Verfahren kann man festhalten, dass im Zähler jeweils eine 1 steht, dass es zu jeder rationalen Zahl genau einen Kettenbruch gibt und umgekehrt, und dass der zu einer rationalen Zahl gehörige Kettenbruch nach endlich vielen Schritten abbricht.

Zur Übung lösen wir folgende kleine Aufgaben:

1. Entwickle $\frac{17}{11}$ und $\frac{11}{17}$, sowie $\frac{17}{11}$ und $\frac{51}{33}$ in einen Kettenbruch. Was fällt auf?

2. Gegeben sind die Kettenbrüche [0,2,5,2,7], [4,3,2,8] und [0,4,3,2,8].
Schreibe die Kettenbrüche ausführlich und rekonstruiere die dazugehörige rationale Zahl in der Form $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$.

Auf Grund der Übungsergebnisse läßt sich vermuten (und auch beweisen, was wir hier nicht machen), dass aus $\frac{a}{b} = [a_1,a_2,...,a_n]$ folgt $\frac{b}{a} = [0,a_1,a_2,...,a_n]$ und umgekehrt, und dass aus $\frac{a}{b} = [a_1,a_2,...,a_n]$ folgt $\frac{am}{bm} = [a_1,a_2,...,a_n]$ $(m \neq 0)$ und umgekehrt.

Was kann man in der Praxis mit Kettenbrüchen anfangen?
Wir betrachten dazu das Beispiel $\frac{1317}{568} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6}}}}$.

Wenn man sukzessive den Kettenbruch vorzeitig abbricht, erhält man eine Folge von Brüchen die den gegebenen Bruch immer besser annähern, ehe sie ihn mit dem letzten tatsächlich erreichen:

Erster Wert: 2; zweiter Wert: $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ = 2,333..; dritter Wert: $2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7}} = \frac{51}{22}$ = 2,31818..;

vierter Wert: $2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{211}{91}$ = 2,31868.. und der endgültige Wert ist $\frac{1317}{568}$ = 2,31866..

Offenbar sind die Näherungsbrüche (bis auf den letzten) abwechselnd zu klein und zu groß, d.h. sie oszillieren um den eigentlichen Wert mit ständig geringerem Abstand. Dies gilt (ohne Beweis) generell und nicht nur in unserem Beispiel.

Für rationale Zahlen gibt es nun unendlich viel Näherungsbrüche. Gibt man für deren Nenner eine obere Schranke an, so ist der aus der Kettenbruchentwicklung entstandene Näherungs-bruch derjenige, der am besten nähert. Dies ist ein bemerkenswerter Zusammenhang.

Wenn wir also für $\frac{1317}{568}$ einen Näherungsbruch suchen, dessen Nenner kleiner als 50 ist, und der die beste Annäherung darstellt, ergibt sich aus dem obigen Beispiel der Bruch $\frac{51}{22}$ als Lösung.

Die Nützlichkeit der Kettenbrüche beruht nicht zuletzt auf der Güte ihrer Näherungsbrüche.

Hier eine Problemstellung dazu:
Zwei Zahnräder, die ineinandergreifen und deren Zähne aufgrund vorgegebener mechanischer Daten sich wie 1317 : 568 verhalten sollen, sind in der Herstellung zu teuer. Es ist die Frage, ob man nicht mit Zahnrädern geringerer Anzahl an Zähnen auskommen kann, wobei der Fehler von dem Schlupf ausgeglichen werden soll. Wir entwickeln einen Kettenbruch und erhalten [2,3,7,4,6] mit den bekannten Näherungsbrüchen. Technisch günstig erscheint der Wert 51:22. Dies ist zugleich der beste Wert, sofern die Anzahl der Zähne am kleineren Rad etwa unter 50 bleiben soll. Der relative Fehler beträgt dann nur 0,2 Promille, was unterstreicht, wie rasch und gut die Näherung mit Kettenbrüchen verläuft.

Nun sind Kettenbrüche aber auch anwendbar auf die näherungsweise Berechnung von irrationalen Zahlen. Dabei entstehen Kettenbrüche, die nicht mehr endlich sind und in deren Zählern nicht mehr stets die 1 steht. Ein Beispiel (ohne Beweis): $\sqrt{7} = 2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4+\ldots}}}$

Wir betrachten ein weiteres Beispiel für einen einfachen (d.h. in den Zählern steht stets 1) Kettenbruch für $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1 \Rightarrow$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_3}} \;;\quad x_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 > 2 \Rightarrow$$

$$x_3 = 2 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{x_3 - 2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_4}}} \;;\quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \frac{1}{x_5}$$ (vergleiche x_2!) und nun wiederholt sich alles.

Für $\sqrt{3}$ ergibt sich also der Kettenbruch $[1,\overline{1,2}]$, wobei der Querstrich die Periodizität anzeigt.

Aufgaben:

1. Entwickle $\frac{964}{437}$ in einen Kettenbruch.
2. Stelle die Folge der Näherungsbrüche auf für [2,4,3,5], [0,2,4,3,5] und [0,7,2,4,1,3].
3. Welcher Näherungsbruch mit einem Nenner kleiner als 40 kommt $\frac{290}{81}$ bzw. $\frac{177}{292}$ am nächsten?

4. Entwickle einen Kettenbruch für $\sqrt{2}$.

2.5 Konstruktion eines allgemeinen Folgegliedes

Die Zahlen 3,8,7 bilden eine endliche Folge von Zahlen. Auch 2,4,6,8,10 stellen eine Zahlenfolge dar, bei der man sofort ein „Bildungsgesetz“ vermutet. Jede Zahl einer Folge steht an einer festgelegten Stelle. Diese gibt man bei der allgemeinen Schreibweise als Index an. An der ersten Stelle einer Folge steht das Glied a_1, an der zweiten Stelle a_2, usw. An der i-ten Stelle befindet sich a_i und die letzte Stelle wird bei einer endlichen Folge allgemein mit n bezeichnet.
Im ersten Beispiel ist also $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 7$ und $n = 3$, im zweiten $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$ und $a_5 = 10$ mit $n = 5$. Da wir im zweiten Beispiel das Bildungsgesetz erkannt haben (man erhält den Zahlenwert, indem man den Indexwert verdoppelt), kann man jetzt das **allgemeine Glied der Folge** schreiben: $a_i = 2i$ für $i = 1, ..., 5$.
Aufgabe: Gib jeweils das allgemeine Glied der Folge an:

a) 3,5,7,9,11,....,31 b) 4,7,10,13,16,19 c) 2,4,8,16,32,64,128

Eine Folge, bei der die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder stets konstant ist, heißt **arithmetische Folge**.
Addiert man die Glieder einer Folge, so erhält man eine **Reihe**, die auch einen Summenwert haben kann. Wenn wir endlich viele Glieder einer arithmetischen Folge addieren, erhalten wir eine **endliche arithmetische Reihe**. Ihr Summenwert von n Gliedern wird allgemein mit $\mathbf{s_n}$ bezeichnet.
Unser zweites Beispiel einer Folge ergibt also die Reihe 2+4+6+8+10, die den Wert $s_5 = 28$ hat.
Für eine endliche arithmetische Reihe gilt folgende Summenformel:

$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ Der Beweis ist mit Hilfe der vollständigen Induktion nicht schwierig.

Beispiel: Wir wählen die Reihe 1+2+3+4+5+6+......+100. Dann ist $n = 100$, $a_1 = 1$ und $a_n = 100$.
Wir erhalten also: 1+2+3+...+100 = 50(1+100) = 5050. Bezeichnen wir die größte Zahl mit k, dann

gilt also: $\boxed{1+2+3+4+5+....+k = \frac{k}{2}(1+k) = \frac{k(k+1)}{2}}$ Diese Formel werden wir gleich benötigen.

Unsere eigentliche Aufgabe in diesem Kapitel wird es sein, für die vorgegebene Folge 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, ... einen Term für das allgemeineFolgeglied zu finden.

Allgemein gilt: Die Zahl k kommt k-mal vor.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a_i	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7

Es gilt:
1 Glied ? 1, 3 Glieder ? 2, 6 Glieder ? 3, 10 Glieder ? 4, 15 Glieder ? 5, 21 Glieder ? 6, ...

Allgemein sieht man, dass die Anzahl der Glieder sich aus der oben vorgestellten Summenformel ergibt. Man kann also allgemein sagen: $\frac{k(k+1)}{2}$ Glieder ? k.

Wir wählen $a_i = k$ und wollen die Bedingung für i herleiten. Als begleitendes Beispiel dient uns $a_i = 5$ mit $10 < i < 16$. Allgemein gilt:

$$\frac{k(k-1)}{2} < i+1 \text{ und } i < \frac{k(k+1)}{2} - 1 \text{ oder } i+1 < \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \frac{k(k-1)}{2} < i+1 < \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow$$

$k^2 - k < 2i + 2 < k^2 + k$ $\qquad$ $k^2 - k$, $2i + 2$ und $k^2 + k$ sind natürliche Zahlen. $\Rightarrow$

$$k^2 - k + \tfrac{1}{4} < 2i + 2 < k^2 + k + \tfrac{1}{4} \Rightarrow$$

$$(k - \tfrac{1}{2})^2 < 2i + 2 < (k + \tfrac{1}{2})^2 \Rightarrow k - \tfrac{1}{2} < \sqrt{2i+2} < k + \tfrac{1}{2} \Rightarrow k < \sqrt{2i+2} + \tfrac{1}{2} < k + 1$$

Da der Term $\sqrt{2i+2} + \frac{1}{2}$ zwischen k und k+1 liegt, und $a_i = k$ ist, gilt: Man erhält den Wert von a_i, indem man von $\sqrt{2i+2} + \frac{1}{2}$ den Dezimalwert nach dem Komma subtrahiert. Die mathematische Schreibweise dafür ist: $a_i = [\sqrt{2i+2} + \frac{1}{2}]$

Falls man an dem etwas seltsam anmutenden Term Zweifel hat, kann man mit Hilfe eines Computers auch für sehr große Indizes schnell zeigen, dass unsere Konstruktion des allgemeinen Folgegliedes richtig ist.

Literatur:

Barth, E. und andere: Anschauliche Geometrie 8, Ehrenwirth München 1985

Oettinger, E.: Kaleidoskop, Klett Stuttgart 1988

König, H.: Indirekte Beweise und ihre Behandlung im Unterricht, Mathematik in der Schule 11/1972

Thiele, R.: Mathematische Beweise, Harri Deutsch Frankfurt/Main 1981

Anschrift des Autors:

Florian Häusler
Wilhelmsgymnasium
Thierschstraße 46
80538 München