

Zentralabitur 2014

Mathematik Grundkurs

Aufgaben Erwartungshorizonte

Zentrale schriftliche Abiturprüfung**2014****Mathematik****Grundkurs****Erwartungshorizonte**

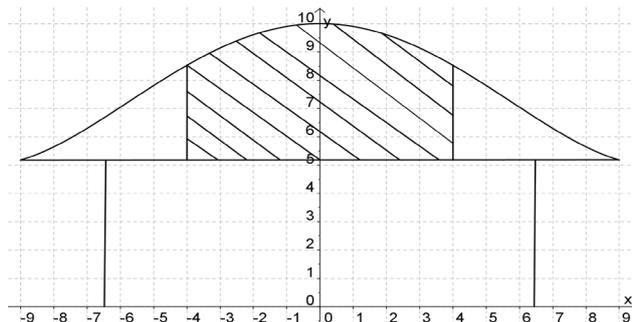
Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.

Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die logisch dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe – z. B. 3.1 a) – ist verbindlich.

Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.

Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe 1.1: Reithalle



Das Profil des Dachs einer Reithalle kann durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion $f(x) = \frac{1}{2000}x^4 - \frac{1}{10}x^2 + 10$ mit $-9 \leq x \leq 9$ (1 LE = 1 m) beschrieben werden (siehe Foto).

Dabei liegt die x -Achse in Höhe des Erdbodens, die y -Achse verläuft durch den höchsten Punkt des Dachprofils.

- a) Zeigen Sie, dass das Dach symmetrisch ist.
Berechnen Sie die Höhe der seitlichen Dachenden auf 1 cm genau.
- b) Weisen Sie nach, dass die Tiefpunkte des Graphen von f außerhalb des Bereichs liegen, der das Dachprofil beschreibt und geben Sie deren Koordinaten an.
Bestimmen Sie Art und Lage des weiteren Extrempunktes.
Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f'(x) = \frac{1}{500}x^3 - \frac{1}{5}x$.
- c) Die Vorderfront der Reithalle besitzt unter dem Dach eine 8 m breite Glasfläche, die in der Skizze schraffiert dargestellt ist. Nach unten ist sie in 5,18 m Höhe durch eine Waagerechte (siehe Zeichnung) begrenzt.
Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.
- d) Auf der linken Seite der Reithalle soll das Dach geradlinig und ohne Knick nach links verlängert werden.
Ermitteln Sie den Neigungswinkel dieser Verlängerung.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die den Verlauf der Dachverlängerung beschreibt.
- e) An den steilsten Stellen des Daches sollen Schneefanggitter angebracht werden.
Berechnen Sie, in welcher Höhe diese Gitter befestigt werden müssen.
Hinweis: Auf die Untersuchung einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	13	11	7	4	40

Erwartungshorizont zu Aufgabe 1.1: Reithalle

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	<p>Untersuchung auf Achsensymmetrie:</p> $f(x) = \frac{1}{2000}x^4 - \frac{1}{10}x^2 + 10 = \frac{1}{2000}(-x)^4 - \frac{1}{10}(-x)^2 + 10 = f(-x)$ <p>Da der Graph von f symmetrisch zur y-Achse verläuft, ist das Dach symmetrisch.</p> <p>Höhe der seitlichen Dachenden:</p> <p>Aus Symmetriegründen gilt: $f(9) = f(-9) = \frac{9^4}{2000} - \frac{9^2}{10} + 10 \approx 5,18\text{m}$</p>	3		
b)	<p>Nachweis, dass die Tiefpunkte außerhalb des Dachintervalls liegen:</p> <p>Untersuchung der notwendigen Bedingung: $f'(x) = 0$</p> $0 = x^3 - 100x \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -10 \vee x_3 = 10$ <p>Untersuchung einer hinreichenden Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$</p> <p>2. Ableitung: $f''(x) = \frac{3}{500}x^2 - \frac{1}{5}$</p> $f''(10) = f''(-10) = \frac{2}{5} > 0; \text{ An den Stellen } x_2 = -10 \text{ und } x_3 = 10$ <p>existieren Tiefpunkte. Dies ist außerhalb des Dachintervalls.</p> $f(10) = f(-10) = 5. T_1(10 5) \text{ und } T_2(-10 5) \text{ sind Tiefpunkte.}$ <p>Aus Symmetriegründen liegt der Hochpunkt mittig zwischen den Tiefpunkten bei $(0 f(0))$ mit $f(0) = 10. H(0 10)$</p>	4		
	<p>Aus Symmetriegründen liegt der Hochpunkt mittig zwischen den Tiefpunkten bei $(0 f(0))$ mit $f(0) = 10. H(0 10)$</p>	6		
c)	<p>Flächenberechnung:</p> $A = 2 \int_0^4 (f(x) - f(9)) dx \text{ mit } f(9) = 5,18$ $A = 2 \int_0^4 \left(\frac{1}{2000}x^4 - \frac{1}{10}x^2 + 4,82 \right) dx$ $A = 2 \left[\frac{1}{10000}x^5 - \frac{1}{30}x^3 + 4,82x \right]_0^4$ $A = 2 \left(\frac{4^5}{10000} - \frac{4^3}{30} + 4,82 \cdot 4 \right)$ $A \approx 34,50\text{m}^2$		3	
			8	

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
d)	<p>Berechnung des Neigungswinkels: Gesucht ist der Anstieg $m = f'(-9) \approx 0,34$. Mit $m = \tan \alpha$ erhält man $\alpha \approx 19^\circ$. Durch Einsetzen der Koordinaten von $P(-9 5,18)$ in $g(x) = 0,34x + n$ erhält man $g(x) = 0,34x + 8,24$.</p>		7	
e)	<p>Bestimmen der Wendestellen: Untersuchung der notwendigen Bedingung: $f''(x) = 0$ $0 = \frac{3}{500}x^2 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 = \frac{100}{3} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{10\sqrt{3}}{3} \vee x_2 = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ Die gesuchte Höhe wird berechnet mit $h = f\left(\pm \frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{65}{9}$. $h \approx 7,22\text{m}$</p>			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	18	18	4
	Summe der BE	40		

Aufgabe 1.2: Zimmerpflanze

Lena bekommt eine Zimmerpflanze geschenkt. Sie beobachtet das Pflanzenwachstum in den ersten 8 Wochen und beschreibt es näherungsweise durch eine Funktion h_1 mit $h_1(t) = 0,05 \cdot e^{0,3t}$, wobei h_1 die Höhe der Pflanze in Metern und t die Zeit seit dem Beginn der Beobachtung in Wochen bedeuten.



- a) Geben Sie die Höhe der Pflanze zu Beginn der Beobachtung und ihre Höhe 8 Wochen später an.
Berechnen Sie, wie hoch die Pflanze 13 Wochen nach Beginn der Beobachtung wäre. Tatsächlich ist die Pflanze nach 13 Wochen jedoch nur 2,06 m hoch. Die Höhe wird deshalb für $t \geq 8$ durch eine Funktion h_2 mit $h_2(t) = a - b \cdot e^{-0,3t}$ beschrieben. Bestimmen Sie a und b aus den beobachteten Höhen nach 8 und nach 13 Wochen.
[Zur Kontrolle: $a \approx 2,5$; $b \approx 21,4$]
- b) Lenas Zimmer ist 2,70 m hoch.
Untersuchen Sie, ob die Pflanze nach 20 Wochen gemäß h_2 noch in das Zimmer passt und ob sie irgendwann einmal an die Zimmerdecke stößt.
- c) Vervollständigen Sie die Wertetabelle auf der nächsten Seite mit den Werten zu h_2 . Ergänzen Sie die graphische Darstellung des Wachstum der Pflanze durch Einzeichnen des Graphen G_2 von h_2 für $8 \leq t \leq 20$ in der Anlage.
- d) Berechnen Sie $h_1'(8)$ und $h_2'(8)$. Vergleichen Sie die beiden Werte. Entscheiden Sie begründet, ob die Modellierung zum Zeitpunkt $t = 8$ realistisch ist.
- e) Um ein optimales Pflanzenwachstum zu garantieren, muss die Pflanze regelmäßig gedüngt werden. Die Maßzahl des Flächeninhalts unter dem aus den Graphen von h_1 und h_2 zusammengesetzten Funktionsgraphen entspricht der zu verabreichenden Düngemittelmenge in ml.
Berechnen Sie die vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Ende der 20. Beobachtungswoche notwendige Düngemittelgabe in ml.

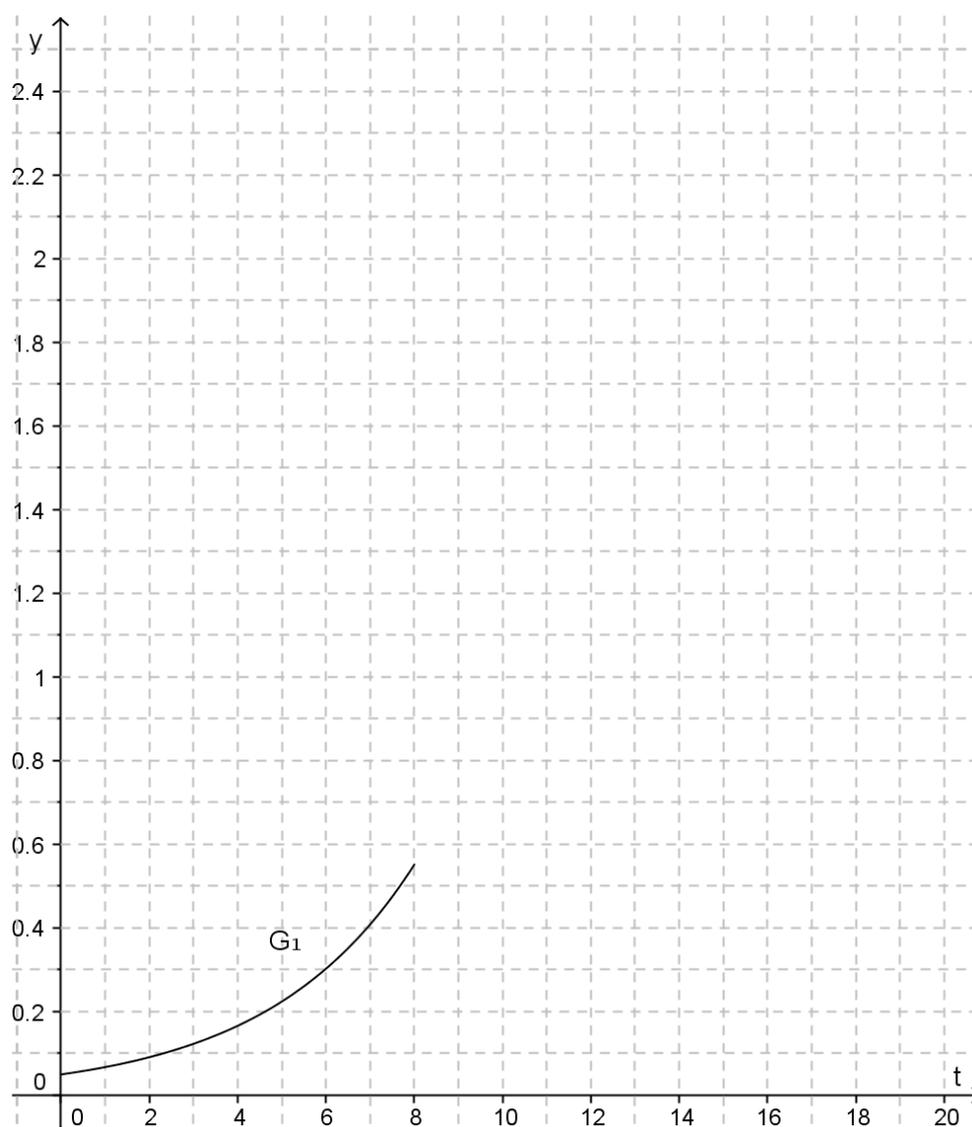
Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	12	4	7	9	8	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.2:Wertetabelle für h_2 :

Zeit t in Wochen	8	9	10	15	20
Höhe der Pflanze in m	0,55				

Koordinatensystem:

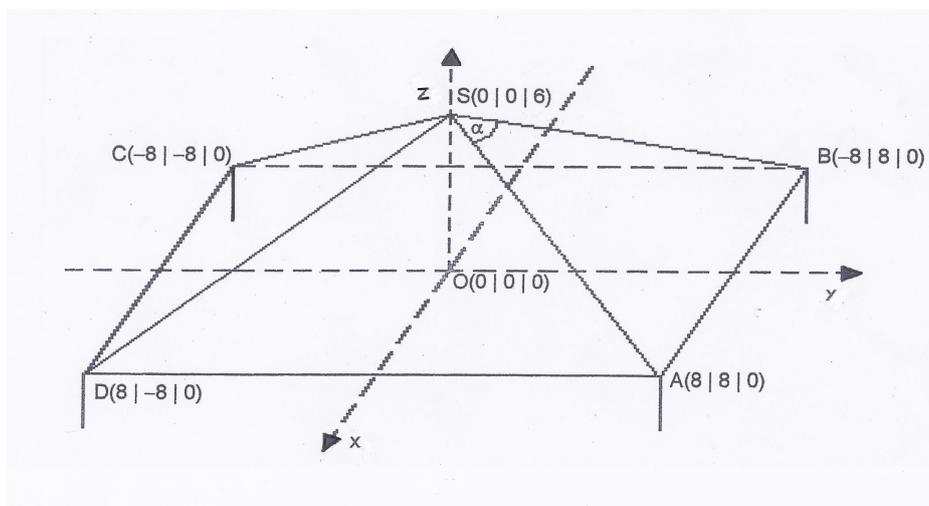


Erwartungshorizont zu Aufgabe 1.2: Zimmerpflanze

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB														
		I	II	III												
a)	<p>$h_1(0) = 0,05$, $h_1(8) \approx 0,55$</p> <p>$h_1(13) = 0,05 \cdot e^{0,3 \cdot 13}$; $h_1(13) \approx 2,47$</p> <p>Die Pflanze müsste ca. 2,47 m hoch sein.</p> <p>Es gilt: $h_1(8) = h_2(8) = 0,55$; I $0,55 = a - b \cdot e^{-0,3 \cdot 8}$</p> <p style="padding-left: 100px;">$h_2(13) = 2,06$; II $2,06 = a - b \cdot e^{-0,3 \cdot 13}$</p> <p>Als Lösung dieses Gleichungssystems ergeben sich</p> <p>$b \approx 21,4$ und $a \approx 2,5$.</p> <p>$h_2(t) = 2,5 - 21,4 \cdot e^{-0,3 \cdot t}$</p>	2														
		2														
			4													
			4													
b)	<p>$h_2(20) = 2,5 - 21,4 \cdot e^{-0,3 \cdot 20} \approx 2,45$</p> <p>Nach 20 Wochen ist die Pflanze 2,45 m groß und passt in das Zimmer.</p> <p>Bestimmen der Maximalhöhe: $h_{\max} = 2,50$ m z. B. durch Testeinsetzungen. Die Pflanze wird nie an die Zimmerdecke stoßen.</p>	2														
			2													
c)	<p>Wertetabelle für h_2 :</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Zeit t in Wochen</td> <td style="padding: 5px;">8</td> <td style="padding: 5px;">9</td> <td style="padding: 5px;">10</td> <td style="padding: 5px;">15</td> <td style="padding: 5px;">20</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Höhe der Pflanze in m</td> <td style="padding: 5px;">0,55</td> <td style="padding: 5px;">1,06</td> <td style="padding: 5px;">1,43</td> <td style="padding: 5px;">2,26</td> <td style="padding: 5px;">2,45</td> </tr> </table> <p>Ergänzung des Graphen:</p> <div style="text-align: center;"> </div>	Zeit t in Wochen	8	9	10	15	20	Höhe der Pflanze in m	0,55	1,06	1,43	2,26	2,45	3		
Zeit t in Wochen	8	9	10	15	20											
Höhe der Pflanze in m	0,55	1,06	1,43	2,26	2,45											
			4													

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
d)	$h_1'(t) = 0,015 \cdot e^{0,3t}; h_2'(t) = 6,42 \cdot e^{-0,3t}$ $h_1'(8) \approx 0,17 \quad ; \quad h_2'(8) \approx 0,58$ $h_1'(8) < h_2'(8)$ <p>Mit den Ableitungen der Wachstumsfunktionen werden die Wachstumsgeschwindigkeiten berechnet. Zum Zeitpunkt $t = 8$ ergeben sich zwei verschiedene Werte, je nachdem, mit welchem Funktionsterm gerechnet wird. Das würde bedeuten, dass sich die Wachstumsgeschwindigkeit nach 8 Wochen sprunghaft ändert, was nicht realistisch ist.</p>	5		4
e)	$V = V_1 + V_2$ $V = \int_0^8 h_1(t) dt + \int_8^{20} h_2(t) dt$ $V = \left[\frac{1}{6} \cdot e^{0,3t} \right]_0^8 + \left[2,5 \cdot t + \frac{214}{3} \cdot e^{-0,3t} \right]_8^{20}$ $V \approx 1,67 + 23,71; \quad V \approx 25,4 \text{ ml}$		4	4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	18	18	4
	Summe der BE	40		

Aufgabe 2.1: Sandkasten



Ein Sandkasten, dessen obere Kanten das Quadrat $ABCD$ bilden, soll als Schutz vor Verschmutzung einen Holzdeckel in Form einer senkrechten Pyramide mit der Spitze S erhalten (siehe Skizze). $1\text{LE} = 1\text{ dm}$.

- a) Zuerst werden die vier Seitenflächen des Deckels zugesägt. Berechnen Sie dazu die Länge der Pyramidenkante AS und den Winkel α zwischen den Kanten AS und BS .
- b) Berechnen Sie, wie viel Quadratmeter Holz für den Bau des Deckels benötigt werden. Der entstehende Abfall sowie Verbindungselemente bleiben unberücksichtigt.
- c) Der Sandkasten ist so gefüllt, dass die ebene Sandoberfläche genau die Fläche $ABCD$ ist. Ein großer Ball mit einem Radius von $2,5\text{ dm}$ liegt genau in der Mitte auf der Sandfläche, bezogen auf die obige Skizze also genau auf dem Koordinatenursprung. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Balls an. Bestimmen Sie für die Ebene, in der die Seitenfläche ABS liegt, eine Gleichung in Normalenform. Weisen Sie nach, dass der Ball beim Aufsetzen des Deckels auf den Sandkasten nicht zusammengedrückt wird.
- d) Zum Anheben des Deckels wird auf den Seitenkanten AS und CS in gleicher Höhe je ein Haltegriff angebracht. Erstellen Sie eine Gleichung der Geraden g_{AS} . Der Befestigungspunkt H_1 des Griffes auf AS soll vom Befestigungspunkt H_2 des Griffes auf CS einen Abstand von 4 dm haben. Weisen Sie nach, dass H_1 und H_2 diesen Abstand haben, wenn sie sich in der Höhe $z = 6 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$ befinden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	7	6	11	6	30

Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.1: Sandkasten

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	<p>Ermitteln der Länge von \overline{AS} :</p> $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad d(A,S) = \sqrt{8^2 + 8^2 + 6^2} = 2\sqrt{41} \approx 12,8 \text{ dm}$ <p>Berechnung des Winkels α :</p> $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{ \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} } = \frac{9}{41}; \quad \alpha \approx 77,3^\circ$	3		
b)	<p>Der Deckel besteht aus vier gleich großen Dreiecken:</p> $A = 4 \cdot \frac{h \cdot \overrightarrow{AB} }{2}; \quad M_{AB}(0 8 0); \quad h = \overrightarrow{SM} = \left \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \right = 10;$ $A = 4 \cdot \frac{10 \text{ dm} \cdot 16 \text{ dm}}{2} = 320 \text{ dm}^2 = 3,2 \text{ m}^2$		6	
c)	<p>Mittelpunkt des Balls: $M(0 0 2,5)$</p> <p>Aufstellen einer Ebenengleichung für E_{ABS} :</p> $E_{ABS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ <p>Bestimmung eines Normalenvektors : z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$</p> <p>Angabe einer Normalengleichung: $E_{ABS} : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$</p>	1		6

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
noch c)	<p>Damit der Ball nicht zusammengedrückt wird, muss der Abstand des Ballmittelpunktes von den Pyramidenseiten größer als der Ballradius sein. Eine der Pyramidenseiten liegt in der Ebene E_{ABS}.</p> <p>Berechnung des Abstandes des Ballmittelpunktes von E_{ABS}:</p> $d(M, E) = \left \left(\vec{m} - \vec{a} \right) \cdot \frac{\vec{n}}{ \vec{n} } \right \text{ mit } \vec{n} = 5$ $d(M, E) = \left \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right = 2,8$ <p>Vergleich: $2,8 > 2,5$</p> <p>Der Ball wird nicht vom Sandkastendeckel zusammengedrückt.</p>		4	
d)	<p>Gleichung der Geraden g_{AS}, auf der H_1 liegt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$.</p> <p>Sei S' der Schnittpunkt der Pyramidenhöhe mit der Strecke $\overline{H_1H_2}$, so gilt laut Strahlensatz: $\frac{\overline{SS'}}{\overline{H_1H_2}} = \frac{h_{\text{Pyramide}}}{\overline{AC}}$, also $\frac{\overline{SS'}}{4} = \frac{6}{16\sqrt{2}}$.</p> <p>Daraus ergibt sich: $\overline{SS'} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ und für die Höhe z der Haltegriffe der gegebene Wert.</p>	2		4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	16	4
	Summe der BE	30		

Aufgabe 2.2: Vogelflug

Ein Bussard kreist über einem Feld und erspät eine Maus auf dem Boden (x - y -Ebene). Er fliegt von

$A(39 | 3 | 36)$ aus geradlinig in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ auf die

Maus zu ($1 \text{ LE} = 10 \text{ m}$).



- a) Geben Sie eine Geradengleichung für die Flugbahn des Bussards an. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M , in dem sich die Maus befindet. [Zur Kontrolle: $M(45 | -15 | 0)$]

Vom Punkt A aus erreicht der Bussard die Maus in 10 Sekunden.

Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- b) In der Ebene E mit der Gleichung $x + y + 12z = 326$ fliegt zur gleichen Zeit ein Schwarm Zugvögel. Der Bussard durchfliegt bei seinem Sturzflug die Flugebene der Vögel. Berechnen Sie, in welchem Punkt S und unter welchem Winkel er die Ebene E durchfliegt.

- c) Ein Flugzeug fliegt entlang der Geraden $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0,5 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

Weisen Sie nach, dass das Flugzeug nicht auf den Vogelschwarm aus b) treffen kann. Berechnen Sie den Abstand, den die Flugbahn des Flugzeugs von der Flugebene E der Zugvögel hat.

- d) Der Vogel an der Spitze des Vogelschwarms aus b) trifft im Punkt $P(70 | -80 | 28)$ auf eine nach oben gerichtete Luftströmung und verändert daraufhin seine Flugbahn. Ohne diese Änderung wäre er direkt in Richtung $Q(22 | -56 | 30)$ geflogen. Durch die Richtungsänderung überfliegt er Q aber in einer Höhe von 400 m über dem Boden.

Berechnen Sie, für welchen Wert von z der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$ die neue Richtung der

Flugbahn angibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	10	8	8	4	30

Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.2: Vogelflug

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	<p>Gerade g für die Flugbahn des Bussards: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 39 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$</p> <p>Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der x-y-Ebene: $z = 36 - 6r = 0$ führt auf $r = 6$; $\vec{OM} = \begin{pmatrix} 39 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit ist $M(45 -15 0)$.</p> <p>Geschwindigkeit v des Bussards: $v = \frac{s}{t}$; $t = 10\text{s}$; $s = d(A, M) \cdot 10\text{ m}$ und $d(A, M) = \sqrt{6^2 + (-18)^2 + (-36)^2} = \sqrt{1656} \approx 40,7$ $v = \frac{407\text{ m}}{10\text{ s}} = \frac{407 \cdot 3,6\text{ km}}{10\text{ h}} \approx 147 \frac{\text{km}}{\text{h}}$</p>	2		
b)	<p>Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebene E : $(39 + r) + (3 - 3r) + 12(36 - 6r) = 326$ führt auf $474 - 74r = 326$ und somit $r = 2$.</p> <p>Einsetzen von r in g ergibt $S(41 -3 24)$.</p> <p>Schnittwinkel α zwischen E und g : Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ von E gilt $\sin \alpha = \frac{ \vec{m}_g \cdot \vec{n} }{ \vec{m}_g \cdot \vec{n} } = \frac{ 1 - 3 - 72 }{\sqrt{46} \cdot \sqrt{146}}$; somit beträgt der Schnittwinkel $64,6^\circ$.</p>	4		
c)	<p>Nachweis, dass f und E parallel verlaufen: $\vec{n} \cdot \vec{m}_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0,5 \end{pmatrix} = -2 - 4 + 6 = 0$; somit ist $\vec{n} \perp \vec{m}_f$.</p> <p>Der Punkt $(50 75 24)$ der Geraden f liegt nicht in E , da $50 + 75 + 12 \cdot 24 = 413 \neq 326$ ist. Folglich ist E (echt) parallel zu f .</p>			4

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
noch c)	<p>Abstand f und E :</p> $d(E,f) = \left \left[\begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 41 \\ -3 \\ 24 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{146}} \right = \frac{87}{\sqrt{146}} \approx 7,2$ <p>Das Flugzeug fliegt im Abstand von 72 m zur Flugebene der Zugvögel.</p>		4	
d)	<p>Die Gerade $h: \bar{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ -80 \\ 28 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$ gibt die neue Flugbahn an.</p> <p>Auf der neuen Flugbahn liegt Punkt $Q^*(22 -56 40)$ senkrecht oberhalb von $Q(22 -56 30)$. Der Lösungsansatz</p> $\begin{pmatrix} 22 \\ -56 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -80 \\ 28 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$ <p>führt auf $s = 8$ und $z = \frac{3}{2}$.</p>			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	16	4
	Summe der BE	30		

Aufgabe 3.1: Sommerfest

Jana geht am Wochenende mit ihrer Schwester auf ein Sommerfest. An einer Losbude kann man Lose aus einer großen Trommel ziehen. Zehn Prozent der Lose sind Gewinnlose, die restlichen sind Nieten, mit denen nichts gewonnen wird.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
 A: Unter 20 gezogenen Losen sind nur Nieten.
 B: Genau drei von 20 gezogenen Losen gewinnen einen Preis.
 C: Unter 20 gezogenen Losen sind mindestens drei Lose, die einen Preis gewinnen.
- b) Der Losverkäufer verspricht, dass unter 30 Losen mit 99 %iger Sicherheit mindestens ein Gewinnlos ist.
 - Zeigen Sie, dass die versprochene Gewinnwahrscheinlichkeit zu hoch ist.
 - Berechnen Sie, wie viele Lose tatsächlich gekauft werden müssen, um mit mindestens 99 %iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Gewinnlos zu erhalten.
- c) Jana kauft zehn Lose. Sie hat zwei Gewinnlose und acht Nieten. Zwei Lose schenkt sie ihrer Schwester ohne zu prüfen, ob es sich dabei um Gewinnlose oder Nieten handelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Jana dann noch genau ein Gewinnlos hat.
- d) Jana hat zwei Plüschtiere gewonnen. Es gibt Bären, Hasen und Affen. Unter den drei Tierarten wählt sie zwei verschiedene aus. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die Jana für diese Auswahl hat.
 Jana kann sich nicht entscheiden. Deshalb wählt sie mit geschlossenen Augen aus einem Korb mit 8 Bären, 7 Hasen und 5 Affen zwei der 20 Plüschtiere aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sie zwei verschiedene Tierarten gewählt hat.
- e) Jana kauft weitere sechs Lose. Unter diesen Losen befinden sich drei Gewinnlose. Sie öffnet wahllos drei der gekauften Lose. Betrachtet wird das Ereignis E : „Unter den drei geöffneten Losen sind k Gewinnlose.“ Zeigen Sie, dass es zwei Werte für k gibt, so dass für die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ gilt: $P(E) = 0,45$.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	7	5	6	4	30

Anlage

**Anlage zu Aufgabe 3.1: Sommerfest
Summierte Binomialverteilungen**

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
alle freien Plätze enthalten 1,0000.

Wird die Tabelle „von unten“ gelesen ($p > 0,5$), ist der richtige Wert $1 -$ (abgelesener Wert)

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
5	0	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0503	0313	4	5
	1	9774	9185	8038	7373	6328	5282	4609	3370	2562	1875	3	
	2	9988	9914	9645	9421	8965	8369	7901	6826	5931	5000	2	
	3		9995	9967	9933	9844	9692	9547	9130	8688	8125	1	
	4			9999	9997	9990	9976	9959	9898	9815	9688	0	
10	0	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0025	0010	9	10
	1	9139	7361	4845	3758	2440	1493	1040	0464	0233	0107	8	
	2	9885	9298	7752	6778	5256	3828	2991	1673	0996	0547	7	
	3	9990	9872	9303	8791	7759	6496	5593	3823	2660	1719	6	
	4	9999	9984	9845	9672	9219	8497	7869	6331	5044	3770	5	
	5		9999	9976	9936	9803	9527	9234	8338	7384	6230	4	
	6			9997	9991	9965	9894	9803	9452	8980	8281	3	
	7				9999	9996	9984	9966	9877	9726	9453	2	
	8						9999	9996	9983	9955	9893	1	
	9								9999	9997	9990	0	
15	0	4633	2059	0649	0352	0134	0047	0023	0005	0001	0000	14	15
	1	8290	5490	2596	1671	0802	0353	0194	0052	0017	0005	13	
	2	9638	8159	5322	3980	2361	1268	0794	0271	0107	0037	12	
	3	9945	9444	7685	6482	4613	2969	2092	0905	0424	0176	11	
	4	9994	9873	9102	8358	6865	5155	4041	2173	1204	0592	10	
	5	9999	9978	9726	9389	8516	7216	6184	4032	2608	1509	9	
	6		9997	9934	9819	9434	8689	7970	6098	4522	3036	8	
	7			9987	9958	9827	9500	9118	7869	6535	5000	7	
	8			9998	9992	9958	9848	9692	9050	8182	6964	6	
	9				9999	9992	9963	9915	9662	9231	8491	5	
	10					9999	9993	9982	9907	9745	9408	4	
	11						9999	9997	9981	9937	9824	3	
	12								9997	9989	9963	2	
	13									9999	9995	1	
20	0	3585	1216	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	0000	19	20
	1	7358	3917	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0001	0000	18	
	2	9245	6769	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0009	0002	17	
	3	9841	8670	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0049	0013	16	
	4	9974	9568	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0189	0059	15	
	5	9997	9887	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0553	0207	14	
	6		9976	9629	9133	7858	6080	4793	2500	1299	0577	13	
	7		9996	9887	0679	8982	7723	6615	4159	2520	1316	12	
	8		9999	9972	9887	9591	8867	8095	5956	4143	2517	11	
	9			9994	9972	9861	9520	9081	7553	5914	4119	10	
	10			9999	9994	9961	9829	9624	8725	7507	5881	9	
	11				9999	9991	9949	9870	9435	8692	7483	8	
	12					9998	9987	9963	9790	9420	8684	7	
	13						9997	9991	9935	9786	9423	6	
	14							9998	9984	9936	9793	5	
	15								9997	9985	9941	4	
	16									9997	9987	3	
	17										9998	2	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	N
p													

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.1: Sommerfest

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	Bestimmung der Pfadwahrscheinlichkeit $P(A)$: Mit $\bar{p} = 0,9$ erhält man $P(A) = 0,9^{20} \approx 0,122$.	2		
	Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 20$, $k = 3$ und $p = 0,1$. $P(B) = \binom{20}{3} \cdot (0,1)^3 \cdot (0,9)^{17} \approx 0,190$	3		
	X : Anzahl der Preise; $P(C) = 1 - P(X \leq 2)$ Mit dem Ablesewert aus der Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung erhält man: $P(C) = P(X \geq 3) \approx 0,323$.		3	
b)	Y : Anzahl der Gewinnlose $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,9^{30}$ $P(Y \geq 1) \approx 0,958$ Damit ist der versprochene Wert zu hoch. Y ist (näherungsweise) binomialverteilt mit $p = 0,1$. $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \geq 0,99$ $1 - 0,9^n \geq 0,99$ $n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9} \approx 43,7$	3		
	Also müssen mindestens 44 Lose gekauft werden.		4	
c)	Jana hat noch genau ein Gewinnlos, wenn ihre Schwester genau eins bekommen hat. Dies lässt sich als zweistufiges Zufallsexperiment modellieren. J : Jana hat noch genau ein Gewinnlos. $P(J) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{45}$ Jana hat mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 35,6 % noch genau ein Gewinnlos.			5

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
d)	<p>Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge: $\binom{3}{2} = 3$; es gibt drei Möglichkeiten.</p> <p><i>D</i>: Jana hat zwei Tiere verschiedener Arten ausgewählt. (Bär-Hase, Bär-Affe, Hase-Affe)</p> <p>Modellierung z. B. durch Anwendung der ersten und zweiten Pfadregel:</p> $P(D) = \left(2 \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} + 2 \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{5}{19} + 2 \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{5}{19} \right) \approx 0,69$	2	4	
e)	<p>Für k gilt $0 \leq k \leq 3$.</p> <p>Modellierung als dreistufiges Zufallsexperiment:</p> $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0,45$ <p>Nur für die beiden Werte $k = 1$ und $k = 2$ erhält man gemäß der Pfadregeln diesen Wert.</p>			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	16	4
	Summe der BE	30		

Aufgabe 3.2: App

Apps (Anwendungsprogramme für Mobilgeräte) werden für unterschiedliche Zwecke genutzt. Durch eine Umfrage wurde ermittelt, welcher Anteil der Befragten Apps für bestimmte Zwecke nutzt. Mehrfachnennungen waren möglich. Die Tabelle zeigt auszugsweise die Ergebnisse der Umfrage. Zum Beispiel nutzen 19 % der Befragten Spiele-Apps.

Zweck	mobile Suche	Terminorganisation	Spiele	Zeitung	Navigation
Anteil	28 %	20 %	19 %	16 %	14 %

(Quelle: Statista-Datenbank)

- a) Man trifft zwei der Befragten.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Beide nutzen Apps zur mobilen Suche.
B: Der erste der beiden nutzt Apps zur Terminorganisation, der zweite nutzt Apps zur Navigation.
- b) Unter den Befragten werden 15 Personen zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
C: Genau fünf der Ausgewählten nutzen Apps zur mobilen Suche.
D: Keiner der Ausgewählten nutzt Apps zur Navigation.
E: Mindestens fünf der Befragten nutzen Apps zur Terminorganisation.
- c) In einem Bus sitzen 15 Personen, von denen genau 10 Apps nutzen. An einer Haltestelle steigen 5 Personen aus.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der noch genau sechs Personen im Bus sitzen, die Apps nutzen.

Tanja kann mit einer App per Zufall entscheiden lassen, in welcher Reihenfolge sie alle ihre sechs Freundinnen anruft. Sie trägt die Namen in die App-Liste ein, schüttelt das Handy und schon stehen die sechs Namen in zufälliger Reihenfolge in der Liste. Eine der sechs Freundinnen heißt Nicole.

- d) Nach dem Schütteln ist Nicole unter den ersten beiden Namen der Liste.
Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür $p = \frac{1}{3}$ ist.
Nachdem Tanja zehnmal auf diese Art alle sechs Freundinnen angerufen hat, stellt sie fest, dass Nicole viermal unter den ersten beiden Angerufenen war.
Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser Fall eintritt.
- e) Mit der Zufalls-App wird 20-mal die Reihenfolge der sechs Telefonate bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der Nicole mehr als k -mal zuerst angerufen wird, soll über 80 % liegen. Untersuchen Sie, für welche k dies möglich ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	9	6	6	4	30

Anlage

Anlage zu Aufgabe 3.2: App
Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
 alle freien Plätze enthalten 1,0000.

Wird die Tabelle „von unten“ gelesen ($p > 0,5$), ist der richtige Wert $1 -$ (abgelesener Wert)

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
5	0	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0503	0313	4	5
	1	9774	9185	8038	7373	6328	5282	4609	3370	2562	1875	3	
	2	9988	9914	9645	9421	8965	8369	7901	6826	5931	5000	2	
	3		9995	9967	9933	9844	9692	9547	9130	8688	8125	1	
	4			9999	9997	9990	9976	9959	9898	9815	9688	0	
10	0	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0025	0010	9	10
	1	9139	7361	4845	3758	2440	1493	1040	0464	0233	0107	8	
	2	9885	9298	7752	6778	5256	3828	2991	1673	0996	0547	7	
	3	9990	9872	9303	8791	7759	6496	5593	3823	2660	1719	6	
	4	9999	9984	9845	9672	9219	8497	7869	6331	5044	3770	5	
	5		9999	9976	9936	9803	9527	9234	8338	7384	6230	4	
	6			9997	9991	9965	9894	9803	9452	8980	8281	3	
	7				9999	9996	9984	9966	9877	9726	9453	2	
	8						9999	9996	9983	9955	9893	1	
	9								9999	9997	9990	0	
15	0	4633	2059	0649	0352	0134	0047	0023	0005	0001	0000	14	15
	1	8290	5490	2596	1671	0802	0353	0194	0052	0017	0005	13	
	2	9638	8159	5322	3980	2361	1268	0794	0271	0107	0037	12	
	3	9945	9444	7685	6482	4613	2969	2092	0905	0424	0176	11	
	4	9994	9873	9102	8358	6865	5155	4041	2173	1204	0592	10	
	5	9999	9978	9726	9389	8516	7216	6184	4032	2608	1509	9	
	6		9997	9934	9819	9434	8689	7970	6098	4522	3036	8	
	7			9987	9958	9827	9500	9118	7869	6535	5000	7	
	8			9998	9992	9958	9848	9692	9050	8182	6964	6	
	9				9999	9992	9963	9915	9662	9231	8491	5	
	10					9999	9993	9982	9907	9745	9408	4	
	11						9999	9997	9981	9937	9824	3	
	12								9997	9989	9963	2	
	13									9999	9995	1	
20	0	3585	1216	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	0000	19	20
	1	7358	3917	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0001	0000	18	
	2	9245	6769	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0009	0002	17	
	3	9841	8670	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0049	0013	16	
	4	9974	9568	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0189	0059	15	
	5	9997	9887	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0553	0207	14	
	6		9976	9629	9133	7858	6080	4793	2500	1299	0577	13	
	7		9996	9887	0679	8982	7723	6615	4159	2520	1316	12	
	8		9999	9972	9887	9591	8867	8095	5956	4143	2517	11	
	9			9994	9972	9861	9520	9081	7553	5914	4119	10	
	10			9999	9994	9961	9829	9624	8725	7507	5881	9	
	11				9999	9991	9949	9870	9435	8692	7483	8	
	12					9998	9987	9963	9790	9420	8684	7	
	13						9997	9991	9935	9786	9423	6	
	14							9998	9984	9936	9793	5	
	15								9997	9985	9941	4	
	16									9987	9987	3	
	17									9998	9998	2	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	N
p													

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.2: App

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
a)	Anwendung der ersten Pfadregel: $P(A) = 0,28 \cdot 0,28 = 0,0784$ $P(B) = 0,2 \cdot 0,14 = 0,028$	3 2		
b)	Es liegt eine Bernoulli-Kette vor mit $n = 15, k = 5$ und $p = 0,28$. $P(C) = \binom{15}{5} \cdot 0,28^5 \cdot 0,72^{10} \approx 0,1935$ $P(D) = (1 - 0,14)^{15} \approx 0,1041$ X : Anzahl der Befragten, die Apps zur Terminorganisation nutzen Ansatz zur kumulierten Binomialverteilung: $n = 15, k = 5, p = 0,2$ Verwendung der Tabelle: $P(E) = P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,8358 = 0,1642$	3 2	4	
c)	Da noch 6 Personen mit App im Bus sitzen, sind 4 ausgestiegen. Somit ist das Lottomodell anwendbar (Pfadregeln auch möglich). K : Anzahl der Aussteiger mit App $P(K = 4) = \frac{\binom{10}{4} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{5}} \approx 0,35$		6	
d)	Gemäß der Pfadregeln gilt: $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Y : Anzahl der Anrufe Modellierung als Bernoulli-Experiment mit $n = 10, p = \frac{1}{3}, k = 4$ $P(Y = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,2276$		2 4	
e)	Z : Anzahl der Anrufe Modellierung durch kumulierte Binomialverteilung mit $n = 20, p = \frac{1}{6}$: $P(Z > k) = 1 - P(Z \leq k) > 0,8$ $P(Z \leq k) < 0,2$ Mit der Tabelle erhält man $k \leq 1$, also sind $k = 0$ und $k = 1$ möglich.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	16	4
	Summe der BE	30		