Integration von Exponentialfunktionen mit Unter- und Obersummen

Gian Deflorin, Dr. Paul Kocian

Disentis, Juni 2013

1 Einführung

Wenn ich in einer Klasse die Integralrechnung einführe, lasse ich die Schüler Grenzwerte berechnen von Ober- und Untersummen bei Potenzfunktionen wie $y = x^2$, $y = x^3$ und evtl. $y = x$. Dies sind klassische Beispiele, die man in jedem Buch für Analysis auf Mittelschulniveau findet. Als Gian Deflorin aus der sechsten Klasse des Gymnasiums Kloster Disentis mich fragte, ob es auch für Exponentialfunktionen möglich wäre, machten wir uns an die Arbeit.

Wir betrachten die Fläche, die von der Kurve $y = a^x$, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 1$ begrenzt wird und wollen ihren Inhalt als Grenzwert von Ober- und Untersummen bestimmen. Wir nehmen $a > 1$ an, damit die Exponentialfunktion monoton wachsend ist.

2 Fall einer natürlichen Exponentialfunktion

2.1 Berechnung mit Untersummen

Das Intervall $[0\ ;\ 1]$ wird in n gleiche Teile unterteilt. Jeder Teil hat also die Länge $\frac{1}{n}$. Der Fläche werden nun n Rechtecke einbeschrieben. Die Summe der Flächeninhalte aller einbeschriebenen Rechtecke ist die Untersumme U_n :

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^0 + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{0\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{1\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{2\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{3\cdot\frac{1}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{(n-1)\cdot\frac{1}{n}}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^0 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \ldots + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Wir setzen $z := \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Somit ist

$$U_n = \frac{1}{n}\left[z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}\right] \quad .$$

Die Summe in den eckigen Klammern bildet eine geometrische Reihe mit dem Quotienten z. Die Verwendung der Summenformel ergibt:

$$U_n \;=\; \frac{1}{n}\, z^0\, \frac{1-z^n}{1-z} \;=\; \frac{1}{n} \cdot \frac{1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \;=\; \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

Nun lassen wir n gegen ∞ streben. Da

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \right) \;=\; -1 \qquad \text{(für Details s. Anhang),}$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} U_n \;=\; \mathrm{e}-1 \quad .$$

2.2 Berechnung mit Obersummen

Der Fläche werden n Rechtecke umbeschrieben. Die Summe der Flächeninhalte aller umbeschriebenen Rechtecke ist die Obersumme O_n :

$$\begin{aligned}
O_n \;&=\; \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{n}{n}} \\
&=\; \frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{1\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{2\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{3\cdot\frac{1}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{n\cdot\frac{1}{n}}\right] \\
&=\; \frac{1}{n}\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \ldots + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n\right] \\
&=\; \frac{1}{n}\left[z^1 + z^2 + z^3 + \ldots + z^n\right] \\
&=\; \frac{1}{n}\cdot z^1 \cdot \frac{1-z^n}{1-z} \;=\; \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \;=\; 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \right) \;=\; -1$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} O_n \;=\; \mathrm{e}-1 \quad .$$

2.3 Schluss

Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich aus dem gemeinsamen Grenzwert von Unter- und Obersummen:

$$A \;=\; \lim_{n\to\infty} U_n \;=\; \lim_{n\to\infty} O_n \;=\; \mathrm{e}-1 \;\approx\; 1.72 \quad .$$

Direkte Integration mit Hilfe einer Stammfunktion führt zum selben Ergebnis:

$$A \;=\; \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 \;=\; \mathrm{e}-1 \quad .$$

3 Fall einer Exponentialfunktion mit Basis 2

Hier wird gleich verfahren, wie im Fall der natürlichen Exponentialfunktion. Wir erhalten folgende Formeln für Unter- bzw. Obersummen:

$$U_n \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1} \qquad \text{und} \qquad O_n \;=\; 2^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}$$

Nun lassen wir n gegen ∞ streben. Da

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right) \;=\; \frac{1}{\ln 2} \qquad \text{(s. Anhang)}$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} U_n \;=\; \lim_{n\to\infty} O_n \;=\; \frac{1}{\ln 2} \;\approx\; 1.44 \quad .$$

Direkte Integration mit Hilfe einer Stammfunktion führt zum selben Ergebnis:

$$\int_0^1 2^x \,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 \;=\; \frac{2^1-2^0}{\ln 2} \;=\; \frac{1}{\ln 2} \quad .$$

Anhang

Zum Abschnitt 2

Wir wollen den folgenden Grenzwert beweisen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\right) \;=\; -1$$

Wir setzen $t := \frac{1}{n}$. Somit ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\right) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{t}{1-\mathrm{e}^t} \quad .$$

Da Zähler und Nenner beide gegen 0 streben und differenzierbar sind (t wird als kontinuierliche Variable betrachtet), verwenden wir den Satz von Bernoulli-l'Hospital:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-\mathrm{e}^t} \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{(t)'}{(1-\mathrm{e}^t)'} \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{1}{-\mathrm{e}^t} \;=\; \frac{1}{-1} \;=\; -1 \quad .$$

Zum Abschnitt 3

Um den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

zu beweisen wird gleich verfahren:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{2^t-1} = \lim_{t\to 0}\frac{(t)'}{(2^t-1)'} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2^t\cdot\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \quad .$$