Übungen zur Analysis I
(WS 2016/17)
9. Übungsblatt (13.12.2016)

Abgabe der Lösungen nächsten Dienstag bis 10:30 in der Vorlesung.

1 Sei $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass genau dann $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ gilt, wenn die Folge konvergiert.

(25 Punkte)

(Tipp: Es kann helfen, zunächst zu zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele n gibt mit $a_n > \varepsilon + \limsup_n a_n$).

2 Beweisen Sie die Konvergenz oder Divergenz folgender Reihen:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n\sqrt{n}}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{5}-1\right)^n, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3+(-1)^n)}{n}.$$

(10+10+10 Punkte)

(Bei (b),(c) stand versehentlich bis Do. die Summe ab $n = 0$.)

3 Zeigen Sie: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, so gilt dies auch für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

(20 Punkte)

4 Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge in $\mathbf{R}^+$, und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere. Folgern Sie, dass $(na_n)_n$ eine Nullfolge ist. *(25 Punkte)*

(Tipp: Wenden Sie das Cauchy-Kriterium an, um die Folge mit Hilfe von $a_{n+1}+\ldots+a_{2n}$ abzuschätzen. Es kann helfen, gerade und ungerade n getrennt zu behandeln).

Sie finden die Aufgabenblätter auch unter
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~koehler/Lehre/2016-17/Vorlesung.html`