Simulation eines Golfballflugs

Aufgabennummer: A_026

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem Simulationsprogramm soll die Flugbahn eines in ebenem Gelände geschlagenen Golfballs dargestellt werden. Sie kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{216\,000} \cdot x^3 + \frac{x}{5}, \quad x \geq 0$$

x … waagrechte Entfernung vom Abschlag in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls in Metern (m), wenn der Ball sich in x Metern Entfernung vom Abschlag befindet (Annahme: Der Golfball bewegt sich in einer Ebene.)

a) Ein 10 m hoher Baum, der genau in der Flugbahn des Golfballs steht, wird von diesem gerade noch überflogen. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Kennzeichnen Sie die möglichen Standorte des Baums in der Zeichnung und lesen Sie die Werte für die Entfernung des Baums vom Abschlag ab.

b) Der Ball fällt in einen Teich, der sich in derselben Höhe wie der Abschlag befindet. Dokumentieren Sie die erforderlichen Lösungsschritte zur Ermittlung des Winkels, unter dem der Ball eintaucht, ohne die Berechnung auszuführen.

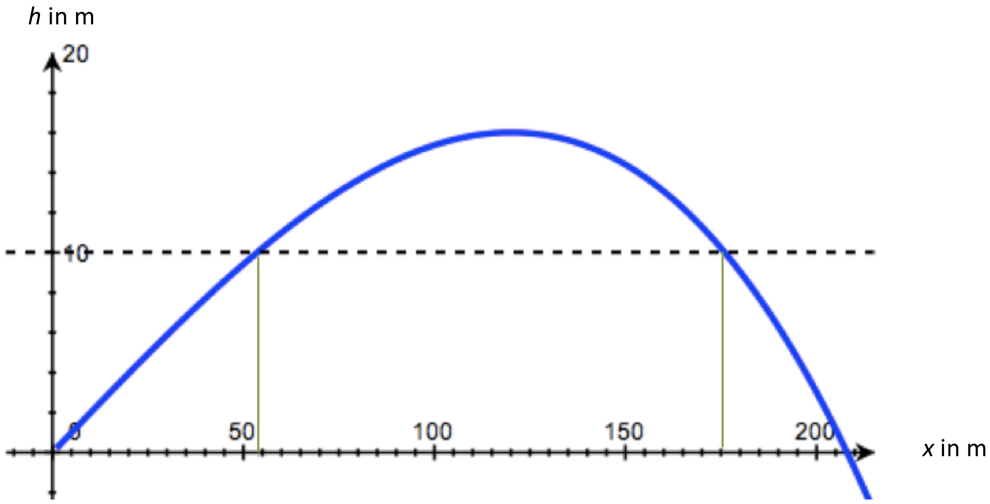
c) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punkts der Flugbahn mithilfe der Differenzialrechnung.

d) Begründen Sie, warum die gegebene Funktion höchstens einen Hochpunkt (lokales Maximum) haben kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Baum steht in ca. 54 m oder in ca. 176 m Entfernung vom Abschlag.
(Hinweis: Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.)

b) Um den Winkel zu ermitteln, unter dem der Ball in den Teich eintaucht, sind folgende Schritte notwendig:

1. Eintauchstelle x_E ermitteln: $h(x_E) = 0,\ x_E \neq 0$
2. Steigung der Funktion an der Stelle x_E ermitteln: $k = h'(x_E)$
3. Eintauchwinkel α ermitteln: $\tan \alpha = k \Rightarrow \alpha = \arctan k$

(Hinweis: Auch andere, analoge Lösungswege sind zulässig.)

c) Ermittlung des Maximums:

$$h'(x) = -\frac{x^2}{72\,000} + \frac{1}{5}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x = 120$$

$$h(120) = 16 \Rightarrow M = (120|16)$$

Der höchste Punkt der Flugbahn ist der Punkt $M = (120|16)$. Der Golfball erreicht seine maximale Flughöhe von 16 m in einer waagrechten Entfernung von 120 m vom Abschlag.

d) $h(x)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, ihre 1. Ableitung $h'(x)$ ist daher eine quadratische Funktion. Die Gleichung $h'(x) = 0$ hat höchstens 2 Lösungen, es gibt also maximal 2 lokale Extremwerte. Nur einer davon kann – da $h(x)$ stetig ist – ein Maximum sein.

(*Auch andere Argumentationen sind möglich, z. B.:*
$h(x)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, mit maximal 3 Nullstellen, also höchstens einem lokalen Maximum.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Sport

Quellen: –