Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

2 Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Gleichung von E in Parameterform:

Mit $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PU} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ erhält man $E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ r,s \in IR$.

[Kontrolle: $x + y + z = (4 - r) + (0 + s) + (2 + r - s) = 6$]

$OG: \ \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in IR$.

Wegen $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1+1=0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-1=0$ ist der Richtungsvektor von OG

orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren von E und damit orthogonal zur Ebene E.

Schnittpunkt von OG und E:

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = \ \ 4 - r \\ t = \ \ \ \ s \\ t = 2 + r - s \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = 4 - r \\ t = \ \ s \\ 2s = 2 + r \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = 4 - r \\ t = \ \ s \\ 3s = \ \ 6 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} r = 2 \\ t = 2 \\ s = 2 \end{array} \right|$$

oder einfacher mit dem Kontrollergebnis für E: $x + y + z = t + t + t = 6 \Rightarrow t = 2$.

Der gesuchte Schnittpunkt von OG und E ist $M(2\,|\,2\,|\,2)$.

Modelllösung b)

Der Punkt $M(2\,|\,2\,|\,2)$ ist der Schnittpunkt der Geraden OG und der Ebene E.

$|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + 0^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ [LE] ,

$|PM| = \sqrt{(2-4)^2 + (0-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{8} = |PQ|$,

$|QM| = \sqrt{(2-2)^2 + (0-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = |PM|$. Die Punkte P und Q haben denselben

Abstand von M und voneinander.

Das gleichseitige Dreieck PMQ hat den Flächeninhalt

$\frac{1}{2}|PQ| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|PQ| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ [FE].

Das Sechseck hat den Umfang $6 \cdot |PQ| = 12\sqrt{2}$ [LE] und, da es aus 6 (zu PMQ) kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht, den Flächeninhalt $6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ [FE].

Modelllösung c)

Da die Gerade OG das Sechseck in M rechtwinklig schneidet, hat die Pyramide die Höhe $|MG| = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{3}$ [LE].

Das Pyramidenvolumen ist daher $\frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$ [VE].

Das Pyramidenvolumen umfasst $\frac{24}{64} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$ des Würfelvolumens.

Modelllösung d)

Wegen $(3-s)+(3-s)+2s = 6$ erfüllt der Geradenterm von g die Ebenengleichung von E unabhängig vom Laufparameter s. Das bedeutet, die Gerade g liegt in der Ebene E.
Die Punkte $A_s(3-s\,|\,3-s\,|\,2s)$, $s \in IR$, $0 \le s \le 2$, der Geraden g bilden die Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten $A(3\,|\,3\,|\,0) = A_0$ und $B(1\,|\,1\,|\,4) = A_2$. Die Strecke $\overline{AB}$ liegt in der Sechsecksfläche. A und B sind die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Sechsecksseiten $\overline{TU}$ und $\overline{QR}$. Die Gerade g verläuft daher in der Mitte zwischen den Geraden QU und RT und parallel zu ihnen; sie ist eine der [sechs] Symmetrieachsen des Sechsecks.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	bestimmt eine Gleichung von E in Parameterform.	5 (II)
2	gibt eine Gleichung der Ursprungsgeraden OG an.	3 (I)
3	zeigt, dass die Gerade OG die Ebene E rechtwinklig schneidet.	3 (II)
4	berechnet den Schnittpunkt.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass das Dreieck *PMQ* gleichseitig ist.	4 (II)
2	bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks *PMQ*.	3 (II)
3	berechnet den Umfang des Sechsecks.	2 (I)
4	bestimmt den Flächeninhalt des Sechsecks.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt die Höhe der Pyramide.	3 (II)
2	berechnet das Pyramidenvolumen.	3 (I)
3	berechnet den Anteil des Pyramidenvolumens am Würfelvolumen.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass die Gerade *g* in der Ebene *E* liegt.	5 (II)
2	bestimmt die gemeinsamen Punkte der Geraden und der Sechsecksfläche.	5 (II)
3	ermittelt die besondere Lage von *g* bezüglich des Sechsecks.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ______________________________

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	bestimmt eine Gleichung …	5 (II)			
2	gibt eine Gleichung …	3 (I)			
3	zeigt, dass die …	3 (II)			
4	berechnet den Schnittpunkt.	5 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (16):					
	Summe Teilaufgabe a)	**16**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass das …	4 (II)			
2	bestimmt den Flächeninhalt …	3 (II)			
3	berechnet den Umfang …	2 (I)			
4	bestimmt den Flächeninhalt …	3 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (12):					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt die Höhe …	3 (II)			
2	berechnet das Pyramidenvolumen.	3 (I)			
3	berechnet den Anteil …	2 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (8):					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	zeigt, dass die …	5 (II)			
2	bestimmt die gemeinsamen …	5 (II)			
3	ermittelt die besondere …	4 (III)			
Sachlich richtige Alternativen (14):					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13,2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

Die Klausur wird mit der Note: ______________________________________ (____Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0